

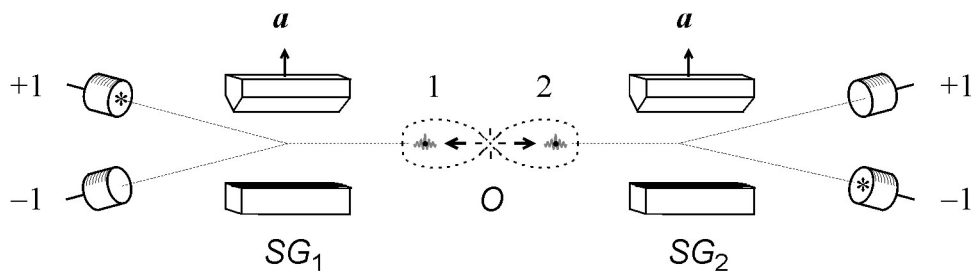
# Einstein estava errado, no argumento de EPR?

ECF5842 – Fundamentos da Mecânica Quântica  
(adaptado do Encontro no Hades – IFUSP – 01/06/2012)

Oswaldo Pessoa Jr.

## 1. Estado “emaranhado” de singlete de spin (Bohm, 1951):

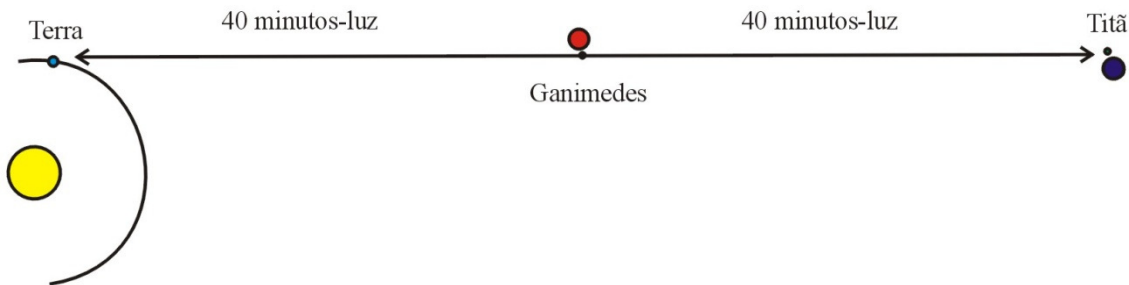
$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle_1 \cdot |-z\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}|-z\rangle_1 \cdot |+z\rangle_2 \quad (1)$$



Este estado tem a propriedade não-clássica de “anticorrelação perfeita” (supondo detectores 100% eficientes) *para qualquer ângulo a* do aparelho de Stern-Gerlach. Por exemplo, se medição da partícula nº 1 der resultado +1, então há uma redução do estado emaranhado para  $|+z\rangle_1 \cdot |-z\rangle_2$ , o que garante que a medição subsequente na partícula nº 2 dará o resultado -1 (esta redução é descrita pelo chamado “postulado da projeção” PP). Assim, o estado da eq.(1) tem uma *invariância rotacional*, ou simetria cilíndrica.

## 2. Argumento de Einstein, Podolsky & Rosen (1935):

Suponha que o par de partículas é gerado na lua Ganimedes (de Júpiter), que está exatamente a meio caminho entre a Terra, onde se mede a partícula nº 1, e a lua de Titã (de Saturno), onde se mede a partícula nº 2. A distância entre a Terra e Titã é  $D_{TT} = 80$  minutos-luz.



Na Terra, Bibocabibs pode escolher livremente, e medir o spin ou na direção  $z$ , ou na direção  $x$ . Se ela medir o spin- $z$  e obtiver o valor +1, ela saberá *com certeza* que em Titã seu colega Astrobigoaldo, ao medir o spin- $z$ , obterá com certeza o valor -1.

**R': Condição suficiente de "elemento de realidade":** se posso prever com probabilidade 1 o resultado de um experimento, então há algo na realidade que causa esse resultado, um elemento de realidade.

Bibocabibs não pode medir simultaneamente os spins  $x$  e  $z$ . Mas se ela pudesse (sem que uma medição afetasse a outra), teríamos ao mesmo tempo, em Titã, um valor bem definido (elemento de realidade) para o spin  $x$  e para o spin  $z$ . A Mecânica Quântica *não contempla* essa situação, por causa do princípio de incerteza: se spin- $z$  é bem determinado, spin- $x$  não pode ser. Assim, se isso acontecesse, poderíamos dizer que a MQ é incompleta, pois haveria algo na realidade que ela não consegue prever ou explicar. Certo?

**C(MQ): Condição necessária para a completude da MQ:** Todo elemento da realidade física deve ter uma contrapartida na teoria física.

Na hipotética situação acima (que é impossível de ocorrer), concluiríamos que a MQ é incompleta, pois há um elemento de realidade que não é descrito pela teoria.

Mas espera aí: qualquer coisa que Biboca fizer na Terra deve demorar pelo menos 80 minutos para chegar em Titã:

**LOC: Princípio de Localidade:** Elementos de realidade concernentes a um sistema não podem ser afetados por medições realizadas à distância (ou seja, o intervalo de tempo entre os dois eventos não pode ser menor do que  $D_{TT}/c$ ).

Em menos de 1 minuto ela consegue decidir o que medir, fazer a medição e ler o resultado. Se ela resolver medir spin- $z$ , em 1 minuto ela saberá o elemento de realidade spin- $z$  em Titã. Mas ela pode resolver medir spin- $x$ , e em 1 minuto conhecerá o elemento de realidade spin- $x$  de Titã. Mas pelo princípio **LOC**, nada do que ela fizer na Terra pode afetar a realidade em Titã no final de apenas 1 minuto (só poderia afetar depois de 80 minutos). Como ela pode prever tanto spin- $z$  quanto spin- $x$ , sem afetar Titã, então há elementos de realidade correspondendo simultaneamente a esses dois observáveis!

Mas já vimos que se isso acontecer, teremos que admitir que a MQ é incompleta! Eis o argumento!

Notamos que o argumento *não envolve medições reais*, mas sim duas situações contrafactuais. Assim, o argumento depende da premissa **CF** de que o raciocínio contrafactual é válido neste caso:

**CF:** O raciocínio contrafactual, neste caso é válido, ou seja:

**PDC: Princípio de definição contrafactual:** Uma medição não realizada forneceria um resultado bem definido, e

**PRC: Princípio de redução contrafactual:** Numa medição contrafactual, o estado global se reduz conforme o postulado da projeção.

Podemos agora esquematizar o argumento, onde " $\neg$ " significa negação, e lembramos que a MQ inclui o postulado da projeção PP:

$$\text{MQ (incluindo PP), LOC, R', CF} \Rightarrow \neg\text{C(MQ)}. \quad (2)$$

Este é o “argumento de EPR”. Ele é logicamente correto?

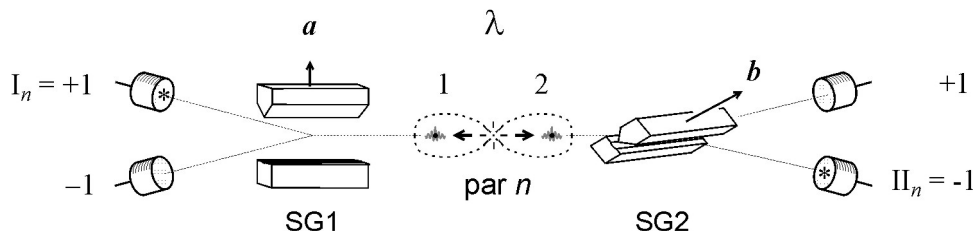
Aceitando a condição suficiente de elemento de realidade (**R'**) e o uso de contrafactuais (**CF**), chegamos ao que Redhead (1987) chamou de *dilema de EPR*: se o formalismo da Mecânica Quântica for considerado correto, então é preciso abandonar ou a condição de localidade **LOC**, ou a crença de que a Mecânica Quântica seja completa (ou os dois):

$$\text{MQ (incluindo PP)} \Rightarrow \neg \text{C(MQ)} \text{ ou } \neg \text{LOC} . \quad (3)$$

Einstein acreditava na condição LOC, então concluiu que a MQ é incompleta. Cada interpretação resolve a questão rejeitando um dos chifres do dilema, ou os dois. Será que Einstein errou aqui?

### 3. O Teorema de Bell

A partir de 1963, John S. Bell começou a estudar as provas de impossibilidade das Teorias de Variáveis Ocultas (TVOs), como aquela derivada por von Neumann em 1932. Mas depois que David Bohm produziu uma TVO que fornecia todas as previsões da MQ, em 1952, ficou claro que tais provas não excluía todas as possibilidades. Mas a teoria de Bohm tinha um aspecto curioso: ela era flagrantemente *não-local*, com ação à distância. Bell então se perguntou: será que esta é uma propriedade geral de TVOs, ou seja, será que toda TVO é não-local? Tendo formulado a pergunta certa, não teve dificuldade de derivar uma desigualdade que limita toda TVO local, mas que é violada pela MQ. Os experimentos confirmaram, em torno de 1980, que a desigualdade é violada na prática, desde que se assumam certas hipóteses de trabalho, que recebem coletivamente o nome de “indução”, mas que iremos ignorar.



O experimento envolve quatro montagens diferentes, por exemplo de ímãs de Stern-Gerlach, orientados em direções diferentes  $a$  e  $a'$  (para a partícula  $n^\circ 1$ ),  $b$  e  $b'$  para a partícula  $n^\circ 2$ . Em cada corrida experimental mede-se estatisticamente o coeficiente de correlação  $c(a,b)$ . Com isso, a desigualdade pode ser escrita como:

$$|c(a,b) + c(a',b) + c(a,b') - c(a',b')| \leq 2 . \quad (4)$$

As hipóteses usadas por Bell para derivar sua desigualdade são as seguintes:

*i) Realismo R-TVO-estoc.* De início, Bell (1964) pressupôs uma teoria de variáveis ocultas (TVO) consistente com a Mecânica Quântica, onde parâmetros adicionais  $\lambda$ , juntamente com o estado quântico  $|\psi\rangle$ , determinariam *de maneira unívoca*

os resultados de quaisquer medições. Posteriormente esta definição foi relaxada, no teorema de Bell para TVOs estocásticas (Bell, 1971; Clauser & Horne, 1974), e passou-se a pressupor a existência real de variáveis que determinam apenas as *probabilidades* dos resultados das medições (veremos um exemplo mais abaixo).

*ii) Localidade LOC-controlável.* A segunda suposição básica é a “localidade”. A probabilidade de se obter um valor para partícula nº 1 independe do *arranjo experimental macroscópico* associado à partícula nº 2. Esta é a “localidade controlável”, associada à transmissão de informação macroscópica. Há porém uma outra acepção de localidade usada nas provas de TVOs estocásticas.

*iii) Localidade LOC-incontrolável,* ou independência de resultados. A probabilidade de se obter um valor para partícula nº 1 independe do *valor* obtido para a partícula nº 2.

Aceitando-se a hipótese da indução, temos o seguinte esquema para o argumento de Bell (nas provas com TVOs estocásticas):

$$\text{MQ, R-TVO-estoc, LOC-controlável, LOC-incontrolável} \Rightarrow \text{Desigualdade de Bell} . \quad (5)$$

Como a desigualdade de Bell é violada, temos que rejeitar alguma premissa. Como não há evidências de violação da localidade macroscópica controlável, o dilema de Bell é o seguinte:

$$\text{MQ} \Rightarrow \neg \text{R-TVO-estoc} \text{ ou } \neg \text{LOC-incontrolável} . \quad (6)$$

#### 4. Alternativas para o Dilema de Bell

O primeiro chifre do dilema é abandonar a visão do Realismo de que há algumas propriedades bem definidas na realidade, para além da observação direta, que determinam os resultados das medições, *ou mesmo que determinam as probabilidades dos resultados.*

Um exemplo desse realismo **R-TVO-estoc** se dá na interpretação ondulatória realista (ver outro *handout*), que pode ser contrastado com a interpretação instrumentalista.

*(i)* Primeiro, supõe-se que o estado correlacionado das partículas, descrito pela eq.(1), tem simetria cilíndrica “real” (hipótese que não é feita pelas visões instrumentalistas, que não associam uma realidade à eq. 1).

*(ii)* Quando Biboca mede o spin-z na Terra, a simetria é quebrada, e o estado em Titã passa a ser o elemento de realidade associado a um dos valores de spin-z. Para as interpretações instrumentalistas, a eq.(1) fornece correlações, e nada mais: falar em elemento de realidade é supérfluo.

*(iii)* Em seguida Astrogobaldo mede spin-x. Segundo a interpretação ondulatória realista, o estado real após a medição de Biboca é um autoestado de spin-z, o que fornece uma probabilidade  $\frac{1}{2}$  para cada resultado possível da medição de spin-x em Titã. Assim, o autoestado de spin-z constitui uma variável oculta estocástica. As interpretações instrumentalistas tendem a rejeitar o realismo, mesmo nesta forma

bastante branda, pois *o estado quântico seria apenas uma descrição matemática* para se calcularem previsões experimentais.

O segundo chifre do dilema também pode ser ilustrado com a interpretação ondulatória realista. Quando Biboca faz uma medição na Terra, o colapso que se segue atingiria instantaneamente Titã. Assim, esta interpretação viola a localidade incontrolável (que é incontrolável porque não temos como controlar o resultado da medição): um resultado obtido na Terra se correlaciona instantaneamente com um valor bem definido em Titã, que não pré-existia antes da medição na Terra (segundo o item *i* acima).

Já a interpretação instrumentalista não fala em violação da localidade: a eq.(1) apenas exprime as correlações experimentais. Não se fala em realidade com simetria cilíndrica antes da medição, nem em elemento de realidade após a redução de estado.

Vemos assim que o instrumentalismo rejeita **R-TVO-estoc**, de forma que não precisa abandonar **LOC-incontrolável**. Já a interpretação ondulatória realista, que postula um estado real simétrico e um colapso real, mantém **R-TVO-estoc**, mas precisa abandonar **LOC-incontrolável**. E as outras interpretações?

## 5. Afinal, Einstein errou no argumento de EPR?

Podemos agora analisar com mais detalhes, à luz do teorema de Bell, a questão de se Einstein errou ao formular o argumento de EPR.

Einstein, Podolsky & Rosen, ao aceitarem **LOC**, implicitamente aceitaram também a **LOC-incontrolável**, pois, segundo eles, um elemento de realidade em Titã não poderia surgir a partir do resultado obtido na Terra. Assim, o dilema de Bell os forçaria a rejeitar o realismo **R-TVO-estoc**. A questão agora é: a aceitação da condição suficiente de “elemento de realidade” **R'** implica na aceitação de **R-TVO-estoc**?

Em nossa exploração da interpretação ondulatória realista, o realismo esteve presente inicialmente na suposição de simetria cilíndrica do estado emaranhado (eq. 1). Para EPR, o que se pode associar a este estado é o elemento de realidade, do par de partículas, que diz que há anticorrelação perfeita para qualquer ângulo de medição, afirmação levemente mais fraca que a anterior.

Na derivação do teorema de Bell, **R-TVO-estoc** corresponde à hipótese de que um autoestado real de spin na direção **a** fornece certa probabilidade para a medição de spin na direção **b**. EPR não precisam utilizar tal hipótese, pois a condição **R'** só se aplica nos casos em que **b=a**. A condição **R'** é claramente mais fraca do que **R-TVO-estoc**, ou seja, à primeira vista **R'** não implica **R-TVO-estoc**.

Sendo este o caso, podemos concluir que, à luz do teorema de Bell, Einstein, Podolsky & Rosen não erraram! Em outras palavras, o conjunto de hipóteses usadas na derivação (2) não parece violar o teorema de Bell.