Cap. XIII

A Curvatura do Espaço-Tempo

Questão: Como entender que o espaço 3D pode ser curvo? E o espaço-tempo?

1. As Geometrias não Euclidianas

Os elementos de Euclides foi escrito em Alexandria, em torno de 300 AEC. Partiu de definições, opiniões comuns (axiomas, ou princípios auto-evidentes) e postulados (suposições geométricas), e passou a demonstrar teoremas e a resolver problemas de construção. Euclides partiu de 23 definições, como a de *ponto*, que é "aquilo que não tem partes", e *reta*, que é "um comprimento sem espessura [...] que repousa equilibradamente sobre seus próprios pontos". Em 1899, o alemão David Hilbert reformularia a axiomatização da geometria plana (ver no final desta seção) sem partir de definições primitivas: "ponto" e "reta" seriam definidos implicitamente pelos postulados.

Os cinco *axiomas* usados por Euclides, em notação moderna, são:

A1) Se A=B e B=C, então A=C.
A2) Se A=B e C=D, então $A+C = B+C$.
A3) Se A=B e C=D, então $A–C = B–C$.
A4) Figuras coincidentes são iguais em todos os seus aspectos.
A5) O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Os cinco *postulados* da geometria plana são:

P1) Dois pontos determinam um segmento de reta.
P2) Um segmento de reta pode ser estendido em qualquer direção.
P3) Dado um ponto, há sempre um círculo em que ele é centro, com qualquer raio.
P4) Todos os ângulos retos são iguais.
P5) Se a soma dos ângulos a e b for menor do que dois ângulos retos, então os segmentos de reta A e B se encontram, se forem estendidos suficientemente (ver Fig. XIII.1).

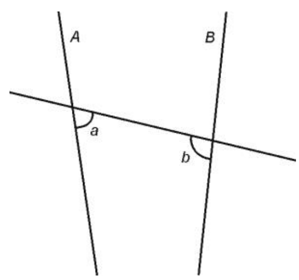


Figura XIII.1: O quinto postulado de Euclides, das paralelas.

No contexto dos postulados **P1-P4** (que formam a chamada "geometria absoluta"), o postulado das paralelas **P5** é logicamente equivalente à proposição de que, dados uma reta A e um ponto P fora dela, passa apenas *uma* reta por P que seja paralela a A (Fig. XIII.2). Veremos a seguir como a discussão do quinto postulado levou no séc. XIX às geometrias não euclidianas.

Com esses axiomas e postulados, deduz-se boa parte da geometria plana, como o teorema de Pitágoras. No entanto, a base de postulados *não* é completa. Por exemplo, Euclides supôs tacitamente que uma reta que passa pelo centro de um círculo passa também por dois pontos do círculo, mas isso não é dedutível da base de postulados!

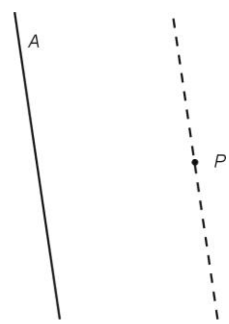


Figura XIII.2: O quinto postulado, na versão publicada por John Playfair (1795).

Além disso, muitas verdades geométricas que dependem da noção de *limite*, algumas das quais formuladas por Arquimedes, não são dedutíveis dos axiomas de Euclides. Também está fora a geometria de figuras desenhadas em superfícies curvas.[113]

Dos cinco postulados de Euclides, **P5** sempre pareceu o menos evidente. Seria ele dedutível dos outros quatro postulados? Em 1733, Girolamo Sacchieri buscou provar a dedutibilidade do quinto postulado através de sua *negação*. Na versão da Fig. XIII.2, supôs que nenhuma reta passaria pelo ponto *P* (**PNP**: Postulado de nenhuma paralela) e, alternativamente, supôs que muitas retas passariam por *P* (**PMP**: Postulado de muitas paralelas). Com cada uma dessas suposições, procurou derivar uma contradição com os outros postulados.

Sacchieri modificou o postulado **P2**, supondo não apenas que um segmento de reta pode ser estendido sem ter pontos terminais, mas que isso é feito necessariamente ao infinito (ou pelo menos o quanto se queira): **P2**$_\infty$. Com isso, deduziu que há *pelo menos* uma reta paralela a *A* passando por *P*, ou seja, refutou **PNP**! No entanto, não conseguiu provar que a reta paralela é única. Esse fracasso reflete o fato de que o postulado **PMP** *é consistente* com os outros. E foi justamente isso que diversos matemáticos começaram a fazer: construir uma geometria que satisfaça **PMP** ao invés de **P5**. Os alemães Carl Friedrich Gauss, em 1813, e Ferdinand Schweikart, em 1818, derivaram a geometria hiperbólica mas não publicaram, e em 1830, independentente, o húngaro János Bolyai e o russo Nikolai Lobachevsky publicaram seus sistemas.

Por que parecia que o **PNP** seria inconsistente com os outros postulados? Porque Sacchieri exigiu que toda reta fosse infinita, pelo postulado **P2**$_\infty$. Mas se as retas fossem finitas, como um grande círculo na superfície de um globo, não possuindo pontos terminais, obtém-se um sistema consistente. Só em 1854 Bernhard Riemann modificou o postulado **P2** e construiu uma geometria satisfazendo **PNP**, uma geometria “elíptica”.

A tabela a seguir faz uma comparação entre algumas propriedades dessas três geometrias.

Geometria euclidiana	**Geometria hiperbólica (lobachevskiana)**	**Geometria elíptica (riemanniana)**
Postulado de uma reta paralela	Postulado de infinitas paralelas	Postulado de nenhuma paralela
Soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.	Soma é menor do que 180°.	Soma é maior do que 180°.
Se a área do triângulo tende a zero, a soma continua 180°.	A soma tende a 180°.	A soma tende a 180°.
A área de um triângulo não tem um valor máximo.	Tem um máximo, e à medida que o triângulo aumenta, a soma dos ângulos tende a zero.	Tem uma área máxima, para a qual a soma dos ângulos tende a $3\cdot180°$.
A razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro é π.	A razão é maior do que π.	A razão é menor do que π.
Há figuras semelhantes com áreas diferentes.	Não há.	Não há.
Linhas estendidas tendem ao infinito.	Linhas estendidas também tendem ao infinito.	Linhas estendidas tendem a um tamanho máximo finito.

[113] A presente seção se baseia em SKLAR (1974), op. cit. (nota 112), pp. 13-43, de onde foram tiradas as Figs. XIII. 3-6 (pp. 21,22,37,41). Além disso, temos: EUCLIDES (1999), *Os elementos*, trad. I. Bicudo, Ed. da Unesp, São Paulo (orig. em grego: c. 300 AEC).

Provas de "consistência relativa" de geometrias não euclidianas envolve encontrar um modelo euclidiano para a geometria não euclidiana, de forma que esta será "tão consistente quanto" a geometria euclidiana. A superfície esférica euclidiana é um modelo "isométrico" para uma geometria riemanniana de 2 dimensões, pois a distância entre dois pontos nesta geometria é mapeada na distância euclidiana da superfície da esfera (ver Figs. XIII.3 e 4).

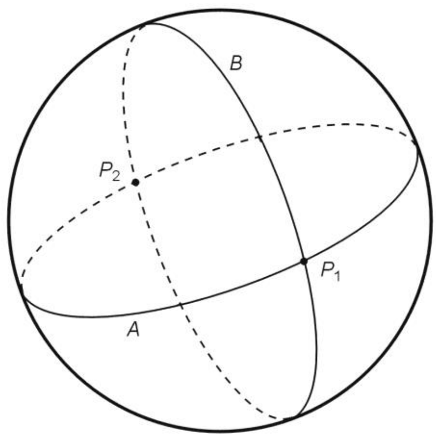


Figura XIII.3: "Retas" (geodésicas) no modelo esférico da geometria riemanniana em 2 dimensões são grandes círculos. Duas retas A e B sempre se encontram em pontos antípodas, no caso P_1 e P_2.

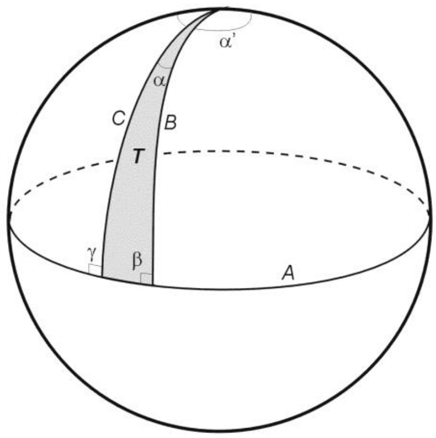


Figura XIII.4: Triângulo T é formado pelas retas A, B, C. Quando o ângulo α é pequeno, a área de T tende a zero. Já o triângulo externo subentendido pelo ângulo α' tem uma área que se aproxima da do hemisfério.

Para a geometria hiperbólica, o italiano Eugenio Beltrami (1868) mostrou que a geometria das curvas de menor distância entre pontos de um hiperboloide de revolução se aproxima dos postulados lobachevskianos, mas não há um modelo isomético sem singularidades. Há porém modelos não isométricos (ver SKLAR, 1974, p. 23).

Em 1899, Hilbert aperfeiçoou a axiomatização da geometria euclidiana, tornando-a completa e com cada axioma independente dos outros. Os seus 20 axiomas se dividem em 7 axiomas de conexão, 5 de ordem, 1 axioma das paralelas, 6 de congruência e um axioma de continuidade (também chamado axioma de Arquimedes). Hilbert aboliu a definição explícita de termos como "ponto", "reta", "plano", "entre" e "congruente". Eles são primitivos, em relação aos quais outros conceitos são definidos.

No sistema de Hilbert, apenas a modificação do axioma das paralelas gera as geometrias não euclidianas. Outros resultados interessantes e inesperados decorrem do abandono do axioma da continuidade de Arquimedes.

2. Teoria das superfícies curvas

É difícil imaginarmos um espaço 3D (tridimensional) curvo, mas a analogia com superfícies (espaço de 2D) consegue nos guiar, até certo ponto, e conseguimos visualizar um espaço 2D curvado em 3D. No entanto, se o nosso espaço 3D for curvo, isso implica que há uma quarta dimensão espacial no qual ele se curva? Em 1828, Gauss desenvolveu a teoria de superfícies curvas gerais, e mostrou que não: pode-se definir a curvatura de maneira *intrínseca*, sem a necessidade de um espaço de dimensão superior!

Para descrever a curvatura de uma superfície em um ponto *P*, considera-se um círculo tangente à superfície *S* que melhor se ajusta à superfície em *P*, ao longo de uma certa direção *u* da superfície. Para diferentes direções, o raio de tal círculo pode variar. Encontram-se então as direções *u* e *v* para os quais os raios são máximo (r_{max}) e mínimo (r_{min}). Gauss definiu as "curvaturas principais" como os inversos desses raios: $k_1 = 1/r_{max}$, $k_2 = 1/r_{min}$. O produto $k = k_1 \cdot k_2$ é chamado de *curva gaussiana*, e ela é positiva se as curvas tangentes maior e menor estiverem no mesmo lado de *S* (como no ponto P_1 da Fig. XIII.3), e negativa se estiverem em lados diferentes (Fig. XIII.5).

Características ditas *intrínsecas* de *S* estão confinadas dentro de *S*, ou seja, não fazem referência à maneira como *S* está imerso em um espaço de dimensão maior. A curvaturas principais k_1 e k_2 são extrínsecas à superfície, mas Gauss provou que *k* é uma grandeza intrínseca!

Outro exemplo de uma grandeza intrínseca é a *geodésica*, que é a curva de menor ou maior distância entre dois pontos. Uma propriedade das geodésicas é que se um vetor tangente for transportado de maneira paralela a uma geodésica, ela sempre permanecerá tangente. Nesse sentido, as geodésicas são as curvas "maximamente retas", ou seja, as que se curvam minimamente, devido apenas à curvatura da superfície.

A geometria riemanniana terá suas propriedades verdadeiras em uma superfície de curvatura gaussiana positiva, e a de Lobatchevski em uma de curvatura negativa. A geometria euclidiana corresponde a superfícies de k=0. Um plano e a superfície de um cilindro têm a mesma curvatura gaussiana (euclidiana), e não diferem em termos de características *locais* (Fig. XIII.6), diferindo apenas extrinsecamente. Para descobrirmos se vivemos em um ou outro, teríamos que explorar propriedades *globais*, por exemplo nos locomovendo ao longo de uma geodésica para ver se voltamos ao mesmo ponto.

Em 1854, Riemann generalizou a geometria analítica de superfícies para espaços curvos de qualquer dimensão, conhecida como *geometria diferencial*. A curvatura de tais espaços *n* dimensionais é caracterizada pelo "tensor de curvatura de Riemann", uma grandeza intrínseca associada ao procedimento de transporte paralelo ao longo de uma curva fechada, cuja área tende a zero.

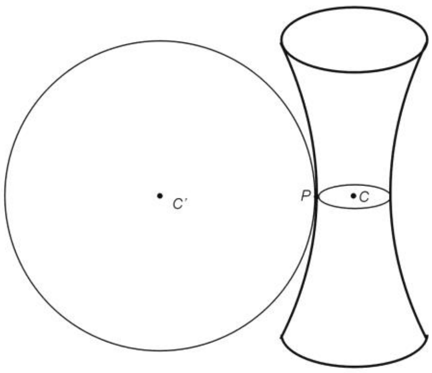


Figura XIII.5: Hiperboloide de revolução, uma superfície com curvatura negativa. As duas curvas que melhor aproximam a superfície em P, em planos ortogonais entre si, estão em lados opostos da superfície.

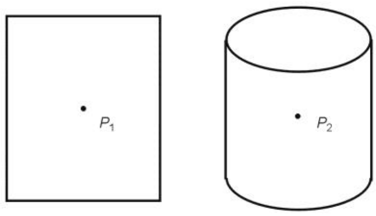


Figura XIII.6: Um plano e a superfície de um cilindro têm as mesmas propriedade locais intrínsecas. As curvaturas principais do cilindro são $k_1 = 1/R$ *e* $k_2 = 0$*, resultando em uma curvatura gaussiana* $k = 0$.

3. Abstrações da Geometria Métrica

As geometrias caracterizadas por Euclides e Riemann têm bem definidas as distâncias entre os pontos, sendo assim geometrias *métricas*. Porém, podem-se caracterizar geometrias em que as distâncias não são definidas, constituindo assim "abstrações" da geometria métrica.

(a) *Espaço afim* (mantém paralelismo). Hermann Weyl sugeriu ser possível definir o transporte paralelo e as curvas "mais retas" de um espaço sem definir uma métrica *g*, que fornece distâncias. Em um espaço afim, pode-se perguntar "C é a curva mais reta entre P e Q?", mas não "Qual é a distância entre P e Q ao longo de C?". A noção de geodésica se mantém, assim como uma noção limitada de distância como razão ente intervalos de geodésicas.[114]

(b) *Variedade diferencial* (mantém coordenadas diferenciáveis). Ao se abandonar a estrutura métrica e a estrutura afim, ainda se podem associar coordenadas aos pontos, definir funções sobre essas coordenadas, e definir derivadas. Um "difeomorfismo" é uma transformação que mantém as características diferenciais invariantes (o que é diferenciável permanece diferenciável); uma transformação afim (linear) mantém também as geodésicas invariantes, e uma transformação rígida mantém também as distâncias invariantes.

(c) *Topologia* (mantém continuidade). Ao se abandonar a s coordenadas, reta um conjunto de pontos com propriedades topológicas, como a dimensionalidade, ser fechado ou aberto (infinito) e ter buracos. Transformações "bicontínuas" mantêm invariantes as características topológicas. A continuidade é definida a partir do conjunto aberto (ver seção VI.4), de onde se derivam as noções de limite, fronteira, dimensionalidade, conexão, compacto e orientação. Numa topologia orientada, como um plano, não se pode transformar uma figura orientada como a mão direita em uma figura orientada como a mão esquerda; porém, numa fita de Möbius isso é possível, constituindo uma topologia não orientada.

(d) *Conjunto* (mantém número de pontos). Abstração mais geral, pode-se perguntar: Quantos pontos há? Finitos, enumeráveis ou não enumeráveis? Os pontos são membros de quais conjuntos?

4. O Espaço-Tempo de Minkowski

O espaço-tempo definido por Hermann Minkowski (1908), a partir da Teoria da Relatividade Restrita de Einstein (1905), pode ser entendido no arcabouço de geometrias métricas apresentadas nas seções anteriores. Para isso, é necessário tomar os pontos da geometria como eventos: assim, *o espaço-tempo é o conjunto de todos os eventos*, ou melhor, das "localizações" de todos os eventos possíveis.

Para a teoria newtoniana, a estrutura do espaço-tempo é $E^3 \times E^1$, ou seja, o produto cartesiano do espaço 3D e do tempo, representados como espaços euclidianos. Define-se assim a *simultaneidade* como eventos que ocorrem no mesmo tempo, e a *distância espacial* é tomada como sendo independente do tempo.

No espaço de Minkowski, esses conceitos não se aplicam (ver Cap. IX). Trata-se de um espaço matemático de 4 dimensões, com topologia E^4, não curvo. É uma variedade diferencial e espaço afim, porém a *métrica* é radicalmente diferente de um espaço euclidiano 4D. O equivalente a uma distância para eventos é o que se chama *intervalo*. Se num espaço euclidiano 4D o diferencial de uma distância é dado por $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$, no

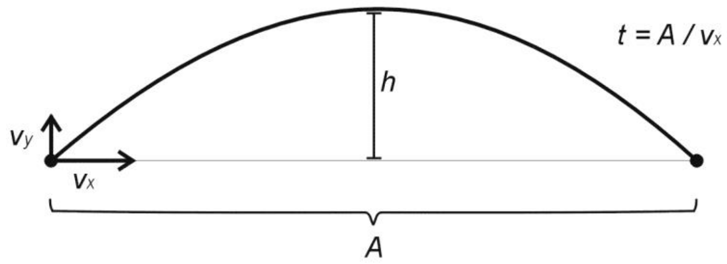
[114] Seguimos nessa seção SKLAR (1974), op. cit. (nota 112), pp. 48-54, e na seção seguinte as pp. 55-64. O espaço afim foi sugerido por WEYL, H. (1919), *Raum, Zeit, Materie*, Springer, Berlim; trad. para o inglês, *Space, time, matter*, Methuen, London, 1922. O termo "variedade" em inglês é *manifold*.

chamado *espaço pseudo-euclidiano* dx_4^2 é substituído por $-c \cdot dt^2$, com sinal menos! Assim, o quadrado de um intervalo ds^2 pode ser negativo!

Há três tipos de intervalos entre eventos. O intervalo "tipo espaço" envolve dois eventos que não podem ser conectados por um sinal causal; o intervalo "tipo tempo" envolve dois eventos que podem ser causalmente conectados; e o intervalo "tipo luz" envolve eventos que podem ser conectados por um raio de luz se propagando no vácuo, com velocidade c.

5. Calculando a Curvatura do Espaço-Tempo na Terra

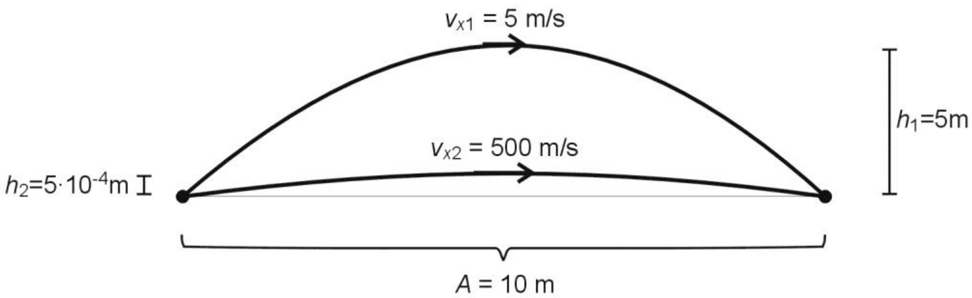
Considere o movimento parabólico de projéteis na superfície da Terra, desprezando-se a resistência do ar.[115] Pode-se caracterizar uma dessas trajetórias univocamente por meio de três parâmetros, o alcance horizontal A, a altura máxima h, e a velocidade horizontal de v_x. Com isso o intervalo de tempo do trajeto é dado por $t = A/v_x$.



Examinemos dois casos:

(Caso 1) Uma bola que percorre $A = 10$ m, com $h_1 = 5$ m, e $v_{x1} = 5$ m/s.

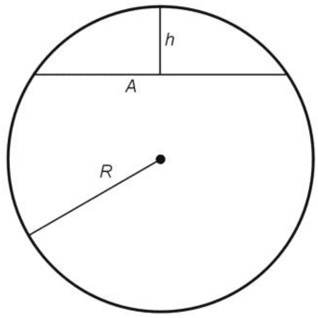
(Caso 2) Uma bala de revólver que percorre o mesmo $A = 10$ m, com $h_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ m, e $v_{x2} = 500$ m/s.



Queremos calcular o *raio de curvatura* dessas trajetórias, aproximando-as de um círculo. Para um segmento de círculo, a geometria estipula que o raio de curvatura R se relaciona com a corda A e a altura h da seguinte maneira:

[115] Baseado em exemplo de MISNER, THORNE & WHEELER (1970), op. cit. (nota 111), p. 33.

$$R = \frac{h}{2} + \frac{A^2}{8h}$$



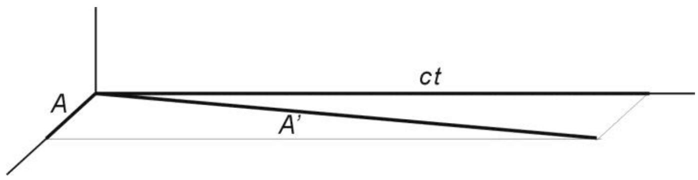
Responda:

(a) Calcule as curvaturas *no espaço*, R_1 e R_2, das duas trajetórias, aproximando a parábola a um segmento de círculo.

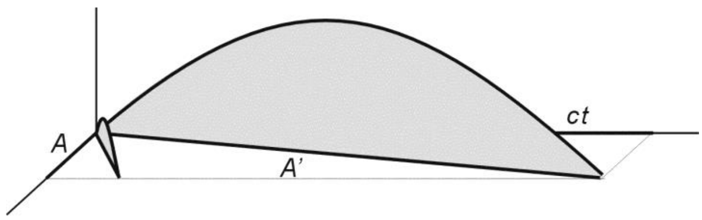
Agora vamos calcular essas curvaturas *no espaço-tempo*. Para isso, devemos levar em conta que, na Teoria da Relatividade Restrita, o tempo pode ser medido em unidades espaciais, por exemplo metros, desde que se multiplique o seu valor em segundos pela velocidade da luz em m/s, $c = 3{\cdot}10^8$ m/s. Ou seja, 1 s = $3{\cdot}10^8$ m.

(b) Calcule agora as curvaturas *no espaço-tempo*, R_1' e R_2', das duas trajetórias. Para este cálculo, *h* não se modifica, mas o alcance *A*' deve ser recalculado para incluir a dimensão temporal *ct*. (O aluno pode usar *ict*, que é o correto, mas as conclusões são as mesmas em ambos os casos.)

$$A' = \sqrt{A^2 + c^2t^2}$$



(c) Compare as curvaturas obtidas. Que conclusões se podem tirar?



6. Filosofia da Física do Espaço-Tempo

Há um conjunto de problemas filosóficos tradicionais relacionados com as teorias da relatividade restrita e geral, que não tivemos oportunidade de estudar. Tais problemas podem ser divididos em quatro grupos[116]:

(i) *Espaço-tempo relativo ou absoluto*. Tratamos desta questão na Cap. XII. A visão do espaço-tempo absoluto, chamada na literatura mais recente de *substantivismo* (em inglês, *substantivalism*), no sentido de que os eventos são entidades "substantivas", no contexto da Teoria da Relatividade Geral enfrenta o problema do buraco (*hole problem*).

(ii) *Convencionalismo sobre o espaço-tempo*. Poincaré argumentou que o qualquer teoria que postula um espaço curvo pode ser reformulada em um espaço euclidiano, mesmo que a teoria se torne mais complicada. Assim, defender que o espaço é realmente curvo seria uma mera convenção. Outra convenção, associada à Teoria da Relatividade Restrita, é a que considera que a velocidade de propagação da luz, quando ela é refletida em um espelho, mantém o módulo do seu valor constante. Mostra-se contudo que é possível que esta velocidade seja diferente, sem violar as previsões observacionais da teoria (ver seção IX.4, interpretação 3).

(iii) *Buracos negros e singularidades*. O tema das singularidades que ocorrem na Teoria da Relatividade Geral, como o buraco negro, tem gerado muito debate filosófico. Este tópico se relaciona com o tratamento quântico das singularidades, a termodinâmica de buracos negros, e a hipótese da censura cósmica de Roger Penrose.

(iv) *Expansão do universo*. Para conciliar a hipótese do *big bang* com medições da radiação de fundo, postulou-se um período de inflação no início do Universo, com rapidíssima expansão. Esta sugestão é bem aceita, mas tem sido criticada por alguns. Há também questões relacionadas ao horizonte do Universo que é visível para nós.

[116] Um bom e sucinto artigo de revisão, que apresenta esta divisão, é: CALLENDER C. & HOEFER, C. (2002), "Philosophy of space-time physics", in Machamer, P. & Silberstein, M. (orgs.), *The Blackwell guide to the philosophy of science*, Blackwell, Oxford, pp. 173-98 (disponível no saite do curso).