Cap. V

Paradoxos de Zenão

Questão: O espaço e o tempo são contínuos ou discretos?

1. Pano de Fundo de Zenão

Zenão de Eleia (490-430 AEC) é bem conhecido por causa de seus paradoxos, como aquele da corrida de Aquiles com a tartaruga. De fato, escreveu um livro com em torno de 40 paradoxos, mas este se perdeu. O que sabemos de Zenão nos foi transmitido por Platão, Aristóteles e pelo comentador Simplício do séc. VI EC.[51]

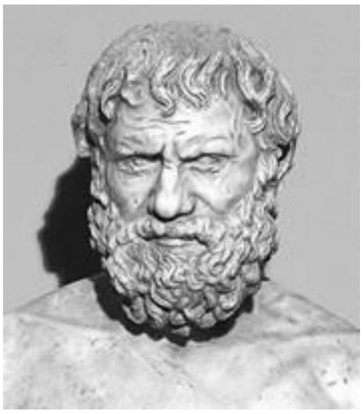

Figura V.1: Zenão de Eleia, escultura helenista do séc. II AEC, Museo Capitolino, Roma.

O que Zenão queria provar com seus paradoxos? Como eles foram encarados na Antiguidade? Como eles são resolvidos hoje em dia?

Zenão era discípulo do grande filósofo Parmênides (515-450 AEC), da cidade de Eleia (atual Itália), que defendia que a *pluralidade* (o estado de haver muitas coisas distintas, ao invés de uma só) não existe e que qualquer *mudança* é impossível. O ponto de partida de Parmênides era a razão, o intelecto, em oposição à observação. É verdade que nossos sentidos veem uma aparente mudança, mas isso seria pura ilusão, pois a realidade não poderia mudar. Afinal, "o que *é* não pode deixar de ser": se alguma coisa tem uma essência, como é que essa essência pode desaparecer desta coisa? Por outro lado, "do não-ser não pode surgir o ser": como é que algo pode surgir do nada? Assim, o Universo seria uno, e não mudaria (algo parecido com a ideia de um único Deus imutável).[52]

As teses de Parmênides tiveram um forte impacto na filosofia da natureza na Grécia. Como explicar a mudança observada das coisas levando em conta uma imutabilidade mais fundamental? Esse "problema da mudança" estimulou soluções como a de Empédocles (490-435 AEC), para quem haveria quatro elementos imutáveis (terra, água, ar e fogo) que se combinariam em diferentes proporções para gerar os diferentes objetos que conhecemos. A mudança seria uma recombinação dos quatro elementos fundamentais, como na queima de madeira (constituída de uma certa proporção de terra, água e fogo), que perde seu elemento água e fogo para se transformar em carvão, que seria terra pura.

Zenão buscava defender as ideias de seu mestre, atacando a ideia de pluralidade e de movimento. Sua estratégia era *supor* a tese que queria atacar, por exemplo a pluralidade de pontos em uma reta, e daí *deduzir* uma consequência que contradissesse sua suposição, levando assim a uma redução ao absurdo.

[51] Uma excelente apresentação é dada por: HUGGETT, N. (2004), "Zeno's paradoxes", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, na internet Um livro clássico com textos de diversos autores é: SALMON, W.C. (org.) (1970), *Zeno's paradoxes*, Bobbs-Merrill, Indianapolis. A figura de Zenão foi retirada da internet, sendo que a expressão "AEC", antes da Era Comum, substitui "a.C." (antes de Cristo), e "EC" designa a Era Comum, no contexto do Calendário Gregoriano.

[52] Esta concepção é semelhante ao "universo em bloco", que veremos na seção VIII.1. O bloco não muda, então nesse sentido não há mudança, o que lembra o Uno parmenidiano. Por outro lado, a concepção do universo em bloco não rejeita a pluralidade.

2. Paradoxos do Movimento

Mencionemos primeiramente os quatro paradoxos do movimento, que são apresentados por Aristóteles (384-322 AEC) em sua *Física*.[53] A Dicotomia e o Aquiles (que retomaremos a seguir) são semelhantes: Zenão parte da suposição de que uma certa distância tem infinitos pontos, e que um corredor teria que passar por todos eles antes de atingir a linha de chegada (ou uma tartaruga), para concluir que o corredor nunca atinge seu objetivo. Assim, a razão mostra que o movimento é impossível, e o que vemos é uma ilusão. A Flecha envolve a noção de que, em cada instante, uma flecha está parada, então como ela poderia estar em movimento? O quarto paradoxo, o Estádio, é apresentado de maneira provavelmente errônea por Aristóteles, então ele tem que ser reconstruído.

3. Paradoxos da Pluralidade

É interessante que os paradoxos do movimento também podem ser usados contra a tese de que o espaço e o tempo possuem partes atuais (reais), ou seja, contra a pluralidade do Universo (que mencionamos ser uma das teses de Parmênides). O filósofo galês G.E.L. Owen (1922-82) fez uma reconstrução de como poderia ter sido este argumento, resultando num grande argumento contra diferentes concepções de pluralidade.[54] Ou seja, apresentaremos os quatro paradoxos de Zenão não como argumentos contra a possibilidade de movimento – que iremos supor que ocorre realmente – , mas contra a divisibilidade do espaço e do tempo em partes reais. É provável que Zenão não tenha articulado seus argumentos dessa forma, mas como nosso interesse é mais filosófico do que histórico, seguiremos a reconstrução de Owen.

O argumento em questão é consistente com a conclusão de Aristóteles de que um todo não possui partes "atuais", mas apenas partes "em potência", cuja atualização (que, no caso de corpos materiais, ocorre apenas ao se quebrar a coisa em pedaços) só pode ocorrer posteriormente à existência do todo. Essa prioridade do todo sobre as partes exprime uma posição conhecida como *holismo*, que examinaremos na seção seguinte.

A questão a ser examinada, então, é se o espaço e o tempo são compostos de uma pluralidade de partes reais. Há, naturalmente, duas respostas possíveis: SIM, são compostos de partes reais; ou NÃO, são um todo sem partes reais, apenas partes imaginadas.

Vamos examinar a resposta positiva. Veremos que as diferentes possibilidades levam a paradoxos, de forma que seremos obrigados a concluir (segundo o argumento atribuído a Zenão) que *o espaço e o tempo NÃO são compostos de partes reais*.

Partamos então da tese de que o espaço e o tempo têm partes reais. A próxima questão a ser colocada é se o espaço e o tempo podem ser divididos sem limite ou se há limites para a divisão. Há duas respostas plausíveis: A) São divisíveis sem limite. B) Há limites para a divisão. Consideremos a primeira alternativa.

A) O espaço e o tempo são divisíveis sem limite. Zenão então teria apresentado dois paradoxos para refutar esta alternativa, o da Dicotomia e o de Aquiles.

1) *Paradoxo da Dicotomia*. Um corredor pretende cobrir uma certa extensão, digamos de 100 m. Antes de chegar ao final, ele terá que passar por um ponto localizado no meio do percurso, ½ da extensão total. Após isso, ele tem que passar pelo ponto que corresponde a ¾ do

---

[53] ARISTOTLE (1996), *Physics*, trad. R. Waterfield, Oxford U. Press, orig. c. 350 AEC. Tradução para o português de trechos relativos aos paradoxos de Zenão (Livros VI e VIII) está disponível no saite do curso.

[54] OWEN, G.E.L. (1957), "Zeno and the mathematicians", *Proceedings of the Aristotelian Society 58*, 199-222, republicado em SALMON (1970), *op. cit.* (nota 51), pp. 139-63. Um resumo deste argumento é apresentado por TILES, MARY (1989), *The philosophy of set theory*, Blackwell, Oxford (nova edição pela Dover), pp. 12-21.

percurso. Depois disso, pelo ponto $\frac{7}{8}$, depois $\frac{15}{16}$, depois $\frac{31}{32}$, etc. Como, pela hipótese A, o espaço é divisível sem limite, há um número infinito de pontos que o corredor deve percorrer antes de chegar ao final de seu percurso (a cardinalidade seria $\aleph_0$, já que se trataria dos números racionais, ver seção VI.7). Assim, conclui Zenão, ele nunca chega ao final!

Este é o paradoxo da Dicotomia "progressivo"; há também a versão "regressiva". Antes de chegar à metade do percurso, o corredor tem que atingir ¼ da extensão total; mas para chegar neste ponto, tem que antes atingir $\frac{1}{8}$ do percurso; e antes disso, $\frac{1}{16}$, etc. Desta maneira, o corredor nem conseguiria iniciar sua corrida!

2) *Paradoxo de Aquiles*. Nesta versão do argumento, o veloz Aquiles aposta uma corrida contra uma lenta tartaruga, que começa dez metros à sua frente. Em pouco tempo, Aquiles atinge a marca dos 10 m, mas neste intervalo de tempo a tartaruga caminhou 1 m. Em seguida, Aquiles percorre esse metro adicional, mas a tartaruga não está mais lá, pois percorreu mais $\frac{1}{10}$ de metro. Quando Aquiles cobre este $\frac{1}{10}$ de metro adicional, a tartaruga está $\frac{1}{100}$ m à frente. E depois, $\frac{1}{1000}$ à frente, e depois $\frac{1}{10.000}$, etc. Como, pela hipótese A, o espaço é infinitamente divisível, sempre haverá um ponto que Aquiles deve atingir antes de prosseguir em seu encalço à tartaruga. Conclui-se então que Aquiles nunca conseguirá alcançar a tartaruga!

Visto que a hipótese A levou a duas situações que vão contra o que constatamos na realidade, ela deve ser rejeitada. Assim, supondo-se que o espaço e o tempo são compostos de partes, não se poderia admitir que essas partes sejam infinitamente divisíveis. Para sermos mais precisos, o que esses argumentos sustentam é que o *espaço* não seria infinitamente divisível. Resta assim a hipótese alternativa.

B) Há limites para a divisão do espaço e do tempo. Neste caso, pergunta-se sobre o tamanho desses limites: eles têm tamanho? (a) Sim, têm tamanho. (b) Não, não têm tamanho. Consideremos cada caso em separado.

(a) Os limites para a divisão do espaço e do tempo têm tamanho. Ou seja, dentro de uma unidade indivisível de tempo, ocorreria um pequeno movimento (esta é uma situação difícil de imaginar, mas prossigamos com o argumento reconstruído por Owen). Neste caso, Zenão teria invocado o paradoxo do estádio.

(3) *Paradoxo do Estádio*. Imagine que durante a Olimpíada, em um estádio, dois dardos são atiradas em sentidos opostos. Estamos supondo que o espaço e o tempo são discretizados, e que suas partes têm um tamanho ou duração mínimos (que chamaremos "unidades"). Supomos também que cada dardo percorre uma unidade espacial a cada unidade temporal. Consideremos um instante em que as pontas dos dardos ainda não se sobrepuseram, mas ocupam unidades espaciais adjacentes. Isso pode ser representado ao encostarmos o dedo indicador da mão esquerda no indicador da mão direita, com as unhas viradas para fora, de forma que possamos ver a divisão de nossos indicadores em três falanges (Fig. V.2a). Escolhendo um ponto de referência em algum objeto à nossa frente (por exemplo, o estádio), consideremos qual é a posição dos nossos dedos/dardos no instante discreto (unidade temporal) seguinte. Ora, o indicador direito se moveu uma unidade para a esquerda, e o dedo esquerdo uma para a direita. Assim, na nova posição relativa dos dois dedos/dardos, há duas unidades espaciais emparelhadas (Fig. V.2b). No entanto, para eles terem chegado nesta situação de emparelhamento de duas unidades, eles teriam que ter passado pela situação

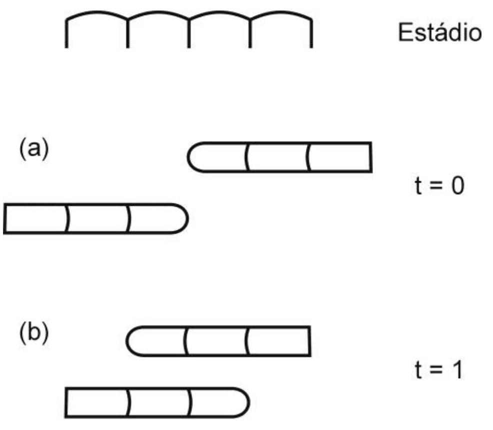

Figura V.2: Paradoxo do estádio.

intermediária em que apenas uma unidade estivesse emparelhada. Isso teria que acontecer em um instante que é metade da unidade temporal tomada como mínima. Portanto, tal unidade não é mínima, mas é divisível! Além disso, nesta meia unidade temporal, cada dardo voou, em relação ao estádio, uma distância que é a metade da unidade espacial. Assim, a unidade espacial também seria divisível! Isso refutaria a hipótese (a).

Resta-nos a outra alternativa.

(b) Há limites para a divisão do espaço e do tempo mas esses não têm extensão ou duração, são pontuais ou instantâneos. Neste caso, segundo a reconstrução de Owen, Zenão invocaria o seguinte problema.

(4) *Paradoxo da Flecha*. Um arqueiro lança uma flecha, que adquire movimento. Em um certo instante, a flecha ocupa um espaço que é igual ao seu volume, portanto, segundo Zenão, ela estaria parada neste instante. Isso se aplica para todos os instantes, assim, a flecha está sempre parada e não poderia estar se movendo, o que contradiz a hipótese inicial de que a flecha está em movimento. Poder-se-ia argumentar que a flecha não está parada no instante, mas voa um pouquinho (durante o instante), de forma que ela estaria em diferentes posições no início e no fim do instante; mas neste caso o instante seria divisível, indo contra a hipótese (b). Aristóteles criticou este paradoxo argumentando que o repouso no tempo é diferente do que ocorreria no "agora", já que neste não se define o movimento, e portanto nem o repouso (*Física VI*, 234a24).

Com isso, rejeitando-se ambas as opções (a) e (b), refuta-se a alternativa B, segundo a qual haveria limites para a divisão do espaço e do tempo. Mas a alternativa A já tinha sido rejeitada. Assim, refuta-se a tese de que o espaço e o tempo sejam compostos de uma pluralidade de partes. A resposta para a questão inicial portanto é "NÃO": o espaço e o tempo são um todo sem partes reais, apenas partes imaginadas.

4. O Holismo Aristotélico

Eis então como Aristóteles utiliza o argumento de Zenão para defender sua visão holista da matéria, de que o todo precede as partes. O espaço e o tempo *não* seriam compostos de um agregado de partes. O argumento é mais intuitivo com respeito a um corpo material.[55] É verdade que se pode dividir um objeto em partes. Quando um tijolo é dividido, temos uma divisão *atual*, em ato. Talvez se possa até dividir um tijolo o quanto queiramos ou possamos, mas antes de realizar essas divisões atuais, elas só existem em potência, como *potencialidade*. O fato de que podemos dividir um tijolo não significa que ele seja *feito* de partes, pois essa possibilidade de dividi-lo é apenas uma potencialidade, não uma atualização. *O todo precede as partes*.

Com esta conclusão, Aristóteles pôde resolver os paradoxos à sua maneira. Os paradoxos da Dicotomia e de Aquiles não procedem porque, para Aristóteles, o contínuo da pista de corrida é homogêneo. Pode-se dividi-lo sem limites, mas tal divisão não é natural, e ela pode ser feita de diferentes maneiras. A divisão é imposta por nós, ela não existe de fato: o enunciado do problema concretiza de maneira indevida a potencialidade de divisão. Em primeiro lugar, o corredor percorre o todo. É por percorrer o todo que ele percorre as partes, e não o contrário, como os enunciado dos paradoxos parecem indicar.

Aristóteles defende que se possa potencialmente dividir o contínuo de maneira ilimitada. Com isso, rejeitam-se os paradoxos do Estádio e da Flecha, que pressupõem um

[55] Notamos aqui uma oscilação entre a questão de se o *espaço* é divisível para a questão de se uma *coisa material* é divisível. Se o espaço tiver materialidade, como sugerido pela noção de um vácuo quântico preenchido de energia flutuante (seção II.7) (e supondo $E=mc^2$, a ser visto na seção IX.5), então as duas questões se aproximariam.

limite para a divisão. Além disso, um *ponto*, para Aristóteles, não é formado por divisão, de maneira que um ponto não seria parte de uma reta. Para ele, um ponto pode ser concebido como uma fronteira entre duas regiões distintas adjacentes.

A visão holista de Aristóteles foi retomada no início do século XX por filósofos que defendem que o espaço e/ou o tempo não são compostos de pontos ou instantes. Para esta corrente, que inclui Henri Bergson, William James e Alfred Whitehead, esta seria a chave para se entender o vir-a-ser temporal, ou seja, como o presente desabrocha do passado (ver seção VII.3).

5. Visão Moderna dos Paradoxos

Os paradoxos de Zenão são ainda tema de discussão hoje em dia. Uma atitude muito natural, por exemplo em relação ao Aquiles, é dizer que a conclusão de Zenão é um absurdo, pois não corresponde à realidade, e que portanto o paradoxo deve ser rejeitado. Seguindo esta linha, Diógenes, o Cínico (413-323 AEC), respondeu ao paradoxo simplesmente se levantando e andando! Mas essa constatação não resolve os paradoxos. (*i*) Para o paradoxo do movimento, o ponto de Zenão é que *racionalmente* não pode haver movimento, de forma que a vivência que temos deste movimento teria que ser uma ilusão dos sentidos. (*ii*) Para o paradoxo da pluralidade, conforme a reconstrução de Owen, concorda-se que o movimento ocorre, porém nenhuma hipótese sobre a pluralidade, usada para explicar racionalmente o movimento, é livre de problemas.

O problema por trás da Dicotomia, que é o mesmo que o do Aquiles, parece repousar na *intuição* de que o corredor demora um tempo finito mínimo para percorrer cada intervalo espacial sucessivo. Como há infinitos desses intervalos, o tempo de transcurso seria infinito. Porém, sabemos que essa intuição é errônea: *o tempo de percurso por cada intervalo é proporcional ao comprimento do intervalo* (supondo velocidade constante). Esse ponto foi apontado por Aristóteles (*Física VI*, 233a25), mas em outro trecho ele se confundiu com relação à presença de infinitos intervalos finitos de tempo (*Física VIII*, 263a15). Da mesma maneira que os intervalos espaciais somam 1 na série convergente $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, os intervalos temporais também o fazem. O corredor acaba completando o percurso!

A moderna análise matemática, inaugurada no séc. XIX com os trabalhos de Augustin Cauchy, Karl Weierstrass e Richard Dedekind, esclareceu a natureza das séries convergentes e do cálculo diferencial e integral, banindo a noção de "infinitesimal", utilizada por Leibniz e outros. Na seção VI.7, veremos como Cantor mostrou que o infinito da sequência de números inteiros (que é igual ao infinito dos números racionais), o chamado "infinito contável", tem cardinalidade menor do que o "infinito não-contável" dos pontos da reta real entre 0 e 1 ($\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$). No entanto, não parece que seja necessário supor que o espaço seja isomórfico aos números reais para resolver os paradoxos da Dicotomia e do Aquiles: bastaria que o espaço tivesse a estrutura dos números racionais (ver seção VI.6).

No século XX, avanços na teoria da medida e da dimensão esclareceram ainda mais a natureza do infinito na matemática. Em 1966, o matemático Abraham Robinson formulou a análise "não-standard", que reintroduziu de maneira rigorosa os infinitesimais na matemática. A aplicação desta teoria para os paradoxos de Zenão foi feita por William McLaughlin (1994).[56]

[56] MCLAUGHLIN, W.I. (1994), "Resolving Zeno's paradoxes", *Scientific American 271* (*5*), pp. 84-9. Seguimos nesta seção as pp. 20-6 de: SALMON, W.C. (1970), "Introduction", in Salmon (org.), op. cit. (nota 50), pp. 5-44, e alguns comentários de HUGGETT (2004), op. cit. (nota 51), pp. 15-6. Ver também: SALMON, W.C. (1980), "A contemporary look at Zeno's paradoxes", in Salmon, *Space, time, and motion: a philosophical introduction*. 2ª ed., U. of Minnesota Press, Minneapolis, pp. 31-67.

O paradoxo da Flecha levanta discussões a respeito da natureza do movimento e do conceito de *velocidade instantânea*. O movimento deve ser visto como a ocupação sucessiva de posições em diferentes instantes? Esta visão chegou a ser defendida por Bertrand Russell, e é conhecida como a "teoria em-em de movimento" (*at-at theory of motion*).[57] Se for verdade que, em cada instante, a flecha estaria parada, não se segue que ela estaria parada ao considerarmos todo o intervalo.

O esclarecimento matemático dos paradoxos da pluralidade e do movimento deixa ainda em aberto a questão da natureza microscópica do espaço e do tempo *no mundo físico*. Será que a continuidade do espaço e do tempo deve ser vista antes de tudo como uma propriedade holística? Ou será que eles podem ser decompostos em partes menores? Estas partes teriam a estrutura dos números reais? Dos números racionais? Haveria instantes infinitesimais? Faz sentido dizer que existem velocidades instantâneas? O espaço poderia ter uma estrutura fractal? A teoria quântica teria algo a acrescentar a esta problemática? E quanto aos objetos materiais, há limites para sua divisibilidade? Isso teria consequências para a divisibilidade do espaço?

[57] RUSSELL, B. (1903), *The principles of mathematics*, Cambridge U. Press, p. 347. Citado por SALMON (1970), op. cit. (nota 56), p. 23.