Cap. VI

Filosofia da Matemática

Questões: Objetos matemáticos existem independentemente? Como explicar a importância da matemática nas ciências naturais?

1. A Matemática na Grécia Antiga

A matemática grega, partindo de Tales de Mileto (c. 625-546 AEC) e Pitágoras de Samos (c. 575-495 AEC), se caracterizou pelo esforço de *demonstrar* de maneira rigorosa os seus resultados. Os pitagóricos, reunidos onde hoje é a Sicília, defendiam que todas as relações científicas eram expressas por meio de *números naturais* (1, 2, 3, ...) ou razões entre tais números, os chamados *números racionais*, ½, ¾, etc. Em consequência desta concepção, supunham que o espaço, o tempo e o movimento eram constituídos de elementos discretos.

Ao pitagórico Hipaso de Metaponto (nascido *circa* 500 AEC) é atribuída a descoberta dos *números irracionais*, como $\sqrt{2}$, que seria a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Esta descoberta era vista como um problema para a filosofia pitagórica, e conta a lenda que Hipaso teria sido lançado ao mar por seus colegas, em represália.[58] Vimos no Cap. V outro problema para a concepção pitagórica: os paradoxos de Zenão, que punham em xeque a concepção de que o espaço e o tempo são divisíveis.

Os matemáticos gregos passaram a dividir a matemática na teoria dos números, que estuda objetos discretos ordenados, e na geometria, que envolve o contínuo. Essa divisão transparece em *Os elementos*, obra escrita por Euclides de Alexandria em torno de 300 AEC. Ele reuniu os trabalhos de Eudoxo, Teeteto e outros matemáticos, sistematizou-os, melhorou as demonstrações, e coligiu sua obra de acordo com o método axiomático. *Os elementos* parte de definições, axiomas (noções comuns, princípios auto-evidentes) e postulados (suposições geométricas). O número 1 foi tratado como a "unidade", e os outros como "números" propriamente ditos. O número 0 não estava presente, e só foi introduzido na Índia, onde se usava o sistema numérico posicional, juntamente com os *números negativos*, pelo matemático Brahmagupta, em 628 EC. Abordaremos os postulados de Euclides na seção XIII.1.

2. Questão Ontológica: Objetos Matemáticos existem independentemente?

Os números existem? Há 27 alunos nesta classe, isso é um fato indubitável: mas o *número 27* existe no mundo, de maneira independente da mente, ou ele apenas existe quando minha mente representa o mundo? Há duas respostas básicas a esta questão.

A tradição pitagórica concebe que os números naturais são entidades reais, que existem na natureza (fora de mentes pensantes), assim como outros objetos matemáticos, como um determinado triângulo. Semelhente visão foi defendida de forma radical por Tegmark (2007), ao afirmar que "nosso mundo físico é uma estrutura matemática abstrata"! [59]

Platão (428-348 AEC) modificou esta concepção, defendendo que as entidades matemáticas não existiriam *no* mundo físico, mas em um mundo abstrato, ideal, para fora do espaço e do tempo. O filósofo Bertrand Russell, simpático a esta concepção no livro *Problemas da filosofia* (1912), utilizou o verbo "subsistir" para designar este tipo de

[58] Muitos detalhes da história da matemática podem ser obtidos de: EVES, H. (2004), *Introdução à história da matemática*, trad. H.H. Domingues, Ed. Unicamp, Campinas (original em inglês: 1953); sobre Hipaso, ver p. 107.

[59] TEGMARK, M. (2007), "The mathematical universe", *Foundations of Physics 38*, 101-50.

realidade, em oposição ao "existir" das coisas particulares. Essa noção de subsistência, em Platão e Russell, não se limitava apenas a entidades matemáticas, mas se estendia para quaisquer propriedades ou relações abstratas, ditas "universais". Assim, para Platão, aquilo que haveria em comum entre um ato justo de um magistrado romano e um ato justo de um rei assírio seria a "justiça", um universal que subsistiria num mundo à parte do material. Os diferentes triângulos que desenhamos num papiro seriam cópias imperfeitas de triângulos ideais, e o que todos os triângulos têm em comum seria a "triangularidade", um universal distinto de qualquer triângulo desenhável, pois cada triângulo é ou isósceles (ao menos dois lados de mesmo comprimento) ou escaleno, ao passo que a triangularidade não teria nenhuma dessas duas propriedades.

Outra distinção a ser feita é quanto à natureza do objeto matemático: seriam entidades (como um número ou uma figura geométrica) ou seria uma "estrutura" ou padrão? Na *concepção estruturalista da matemática*, os objetos matemáticos, como números e funções, são posições nessas estruturas (posições denotadas pelas constantes das teorias matemáticas) e são determinados apenas por suas relações uns com os outros dentro dessas estruturas.[60] Assim, o número 9 na estrutura de números naturais seria algo bem diferente do número 9 em uma estrutura cíclica, como a associada a um relógio (onde 9 + 9 = 6).

A visão metafísica que defende a existência de universais, quer sejam números, quer sejam propriedades, relações ou estruturas, pode ser chamada de *realismo de universais*. A visão antagônica é conhecida como *nominalismo*, e defende que no mundo físico há particulares concretos (coisas) com propriedades, mas tais propriedades não têm uma realidade autônoma, independente de cada particular. Ou seja, para o nominalista, não se pode dizer que os universais subsistem. O que o realista chama de "universais" seriam (para o nominalista em sentido lato) apenas ideias em nossa mente (*conceitualismo*) ou nomes linguísticos (nominalismo, em sentido estrito). A "querela dos universais" foi disputada intensamente na Idade Média, e Guilherme de Ockham (1285-1350) é o grande representante do nominalismo medieval, ao passo que o lógico Willard Quine (1908-2000) é um importante nominalista moderno (para quem propriedades e relações não subsistem independentemente de particulares concretos).[61]

Em filosofia da matemática, a oposição entre realistas e nominalistas é um pouco diferente da querela metafísica dos universais. Os *realistas matemáticos* afirmam que os números, conjuntos e outros objetos matemáticos existem ou subsistem de alguma maneira, independentes dos seres humanos. Já os *nominalistas matemáticos* defendem que os objetos matemáticos são construções mentais, de forma que não se pode afirmar que os números naturais existam no mundo natural.

Grosso modo, o nominalista afirma que a objetividade da matemática é uma consequência da estrutura do cérebro humano (ou de qualquer ser inteligente), ou da maneira como a mente está ligada ao mundo, ou das regras do jogo matemático. Os objetos matemáticos seriam projeções da mente, que podem estar associadas à realidade física, mas segundo esta visão seria sem sentido afirmar que a matemática existe fora da mente de seres inteligentes ou que subsiste em um domínio externo à mente e suas projeções. (Assim a elucidação completa da natureza da matemática talvez dependa do esclarecimento do problema mente-corpo, explorado na seção II.4).

[60] RESNIK, M.D. (1997), *Mathematics as a science of patterns*, Clarendon, Oxford, cap. 10.

[61] Uma excelente introdução ao debate metafísico entre realistas de universais e nominalistas é apresentada por LOUX, M.J. (2002), *Metaphysics: a contemporary introduction*, 2ª ed, Routledge, Londres, caps. 1 e 2. Há um "resumão" em português na internet: http://opessoa.fflch.usp.br/sites/opessoa.fflch.usp.br/files/TCFC4-15-Loux-12.pdf. Sobre as mudanças nas concepções de Russell sobre essas questões, ver CAREY, R. (2019), "Bertrand Russell: metaphysics", *Internet Encyclopedia of Philosophy*, online.

Vale notar que a questão do realismo na ciência, apresentada na seção III.1, é bem diferente da questão do realismo na matemática. A primeira discute a realidade de *entidades ou estruturas físicas concretas*, postuladas por teorias científicas mas *não observáveis*, e que existiriam independentemente dos seres humanos. Já o realismo na matemática postula a realidade de *entidades ou estruturas matemáticas abstratas*, cuja realidade seria independente da existência de seres inteligentes, ou que existiriam no próprio mundo físico (pitagorismo) ou que subsistiriam numa dimensão para além do tempo e do espaço (platonismo).

Um dos argumentos dos realistas, em favor da existência dos objetos matemáticos, é justamente a sua grande utilidade nas ciências naturais. Segundo este "argumento da indispensabilidade", formulado por Quine (que mencionamos ser um nominalista metafísico, mas que era um realista matemático) e por Hilary Putnam, como nossas melhores teorias científicas fazem referência a objetos matemáticos como números, conjuntos e funções, e tais entidades são indispensáveis para a ciência, então devemos nos "comprometer" com a existência real de objetos matemáticos, da mesma maneira que nos comprometemos com a existência de entidades físicas teóricas como quarks e partículas virtuais. Opondo-se a este argumento, o filósofo nominalista Hartry Field trabalhou num projeto para mostrar como é possível construir teorias científicas sem números e outros objetos matemáticos, numa certa linguagem relacional. Conseguiu aplicar seu método para a teoria da gravitação newtoniana, mas não para outras teorias mais contemporâneas. Segundo ele, a matemática seria útil para a ciência pelo fato de ela simplificar muito os cálculos e a expressão de enunciados das ciências exatas, mas ela não seria indispensável.[62]

3. Noções de Continuidade

Consideremos o intervalo entre os números 0 e 1, e imaginemos o conjunto ordenado de todos os números racionais (frações) deste intervalo. Este conjunto é *denso*, pois entre quaisquer dois números racionais existe pelo menos um número racional. É fácil intuir que há um número infinito de racionais neste intervalo.

No entanto, sabemos que números como $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\pi}{8}$ não são racionais, mas fazem parte do conjunto dos reais. Está claro que este conjunto é denso, mas ele também tem a propriedade de ser *completo*. Considere a seguinte sequência crescente infinita de números racionais, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{38}{105}, \frac{1289}{3465}, \frac{16988}{45045}, \ldots\right\}$, onde cada termo n = 1, 2, ... é expresso por $\sum_{m=1}^{n}\left[(4m-3)(4m-1)\right]^{-1}$. Tal sequência tem

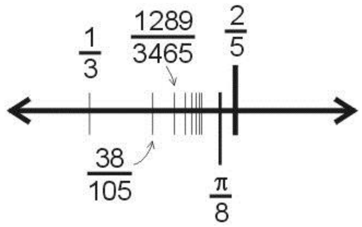

Figura VI.1: Sequência sem um supremo racional.

limites superiores racionais, como $\frac{2}{5}$, ou seja, há números racionais maiores do que todos os termos da sequência. O problema, porém, é que não há um racional que seja o *menor* limite superior, ou *supremo*. Se considerarmos agora esta sequência como um subconjunto dos reais, mostra-se (a partir de fórmula derivada por Gregory e Leibniz no séc. XVII) que tal sequência

---

[62] Uma resumo sucinto da filosofia da matemática é: POSY, C.J. (1995), "Philosophy of mathematics", in Audi, R. (org.), *The Cambridge dictionary of philosophy*, Cambridge U. Press, pp. 594-7. Sobre o argumento da indispensabilidade, ver: COLYVAN, M. (2004), "Indispensability arguments in the philosophy of mathematics", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, na internet. O filósofo brasileiro Otávio Bueno (U. Miami) tem trabalhado nesta e noutras questões da filosofia da ciência e da matemática; por exemplo: BUENO, O. (2010), "Philosophy of mathematics", in Allhoff, F. (org.), *Philosophies of the sciences*, Wiley-Blackwell, Oxford, pp. 68-91, disponível online.

converge para $\frac{\pi}{8}$, que é o supremo da sequência. Assim, os reais são *completos*, no sentido de que todas as sequências com limite superior têm um supremo real.

Na matemática, a noção de *continuidade* aplica-se a funções, como $y = f(x)$. Intuitivamente, diz-se que uma função é contínua se uma pequena variação no argumento x levar a uma pequena variação em y. Na disciplina de Cálculo I, aprendemos a definição rigorosa de continuidade de Cauchy para os reais, em termos de "εpsilons e δeltas". Se uma função for definida para números racionais, parece ser possível aplicar essa noção de continuidade também para os racionais. Por outro lado, o conjunto dos números reais é às vezes chamado de "o contínuo".

4. Existe o Infinito?

Há uma longa história da noção de infinito na matemática, na ciência e na filosofia. Hoje em dia aceita-se que o Universo tenha uma extensão espacial finita, mas a questão do infinitamente pequeno ainda está em aberto, como discutimos no Cap. V.

Na matemática, um resultado importante foi obtido pelo russo-alemão Georg Cantor (1845-1918): podem-se definir infinitos maiores do que o infinito contável! O tamanho de um conjunto é denominado sua "cardinalidade". Cantor denotou a cardinalidade dos números naturais por $\aleph_0$ (alef-zero), ou *infinito contável*. Para encontrar a cardinalidade de outro conjunto infinito, basta tentar mapear os elementos do conjunto nos números naturais. Por exemplo, mostra-se que a cardinalidade dos números racionais também é $\aleph_0$, escrevendo todas as frações m/n em uma matriz na posição (m,n), e escolhendo uma sequência de ordenamento, como o da Fig. VI.2, a partir da qual se pode mapear cada fração em um número natural (podem-se eliminar as frações de valores repetidos).

Qual seria a cardinalidade dos números reais, entre 0 e 1? Cantor apresentou o "argumento da diagonal", que permite construir um número real que escapa da tentativa de mapear bijetoramente os números reais nos inteiros. Façamos uma lista dos números reais entre 0 e 1, com $i = 1, 2, ...$, escrevendo cada um da seguinte forma: $p_i = 0 , a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ...$, onde os a_{ij} são dígitos entre 0 e 9 (Fig. VI.3). Por exemplo, $\frac{\pi}{8} = 0{,}392...$ teria $a_{i1}=3$, $a_{i2}=9$, $a_{i3}=2$, etc. Naturalmente, esta lista de números reais p_i seria contavelmente infinita, mas há pelo menos um número real que não consta desta lista, o número $q = 0 , b_1, b_2, b_3, ...$, construído da seguinte maneira. Consideremos os dígitos na diagonal $i=j$, ou seja, a_{11}, a_{22}, etc. Se o dígito $a_{ii} = 5$, então $b_i = 4$; se $a_{ii} \neq 5$, então $b_i = 5$. Com isso, constrói-se um número real b que não consta da lista contavelmente infinita (que tem cardinalidade $\aleph_0$). Isso mostra que a cardinalidade dos números reais, que Cantor mostrou ser igual a $2^{\aleph_0}$, é maior do que a dos números racionais: $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Este é chamado de infinito incontável, ou transfinito.

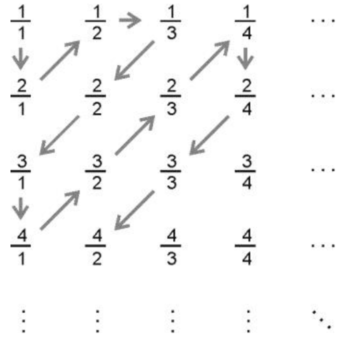

Figura VI.2: Números racionais são contáveis.

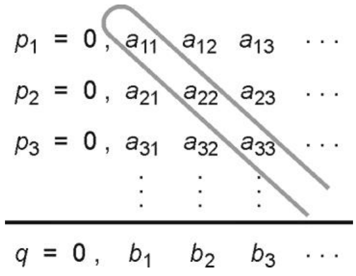

Figura VI.3: Argumento da diagonal de Cantor.

Notamos que esta discussão não diz nada sobre a existência de conjuntos infinitos no Universo físico.

5. Questão de Aplicação: A Utilidade da Matemática

Por que a matemática é tão importante na física? Por que as leis matemáticas da natureza funcionam tão bem? Essas são questões que o destacado físico húngaro-americano Eugene Wigner (1902-95) discutiu em um artigo em que usou a curiosa expressão "desarrazoada (não razoável) efetividade (eficácia) da matemática".[63] A opinião de Wigner era que a gente não compreende porque a matemática é tão útil na física, de forma que seria uma espécie de "milagre": "A lei da gravidade que Newton relutantemente estabeleceu, e que ele pôde verificar com uma acurácia de aproximadamente 4%, posteriormente se mostrou acurada numa porcentagem menor do que dez milésimos" (p. 231). Ou seja, usamos a matemática para descrever um domínio limitado da realidade, e às vezes essa descrição matemática se mostra eficaz em domínios muito mais amplos. Outro exemplo que Wigner cita é o sucesso da mecânica quântica (a partir de 1927) em explicar os níveis energéticos do átomo de hélio, um sistema bem mais complexo (por envolver *dois* elétrons interagentes) do que aqueles usados por Heisenberg para construir sua mecânica matricial. "Com certeza, neste caso, conseguimos 'tirar alguma coisa' que não tínhamos posto nas equações" (p. 232).

Diversas respostas foram dadas a este problema de porque a matemática funciona tão bem na física.

(a) A resposta mais simples a este problema é fornecido pelos pitagóricos, como Tegmark, que explicariam essa efetividade pelo fato de a natureza *ser* intrinsecamente matemática, de ela *ser constituída* por estruturas matemáticas. Assim, fica explicado por que o cientista tem tanto sucesso em descrever a natureza com a linguagem matemática, e em fazer novas previsões. Na variante platonista, as formas das coisas seriam cópias imperfeitas das ideias matemáticas puras e perfeitas.

(b) A resposta de Wigner foi de que a efetividade da matemática é um "milagre", ou seja, é inexplicável. Nessa sua atitude, que pode ser chamada de *misteriana*, ele considerava até "difícil acreditar que nosso poder de raciocínio foi levado, pelo processo de seleção natural de Darwin, à perfeição que ele parece possuir" (p. 224). Sua posição tem sido descrita como "mentalista", indicando que claramente não tinha uma visão de mundo estritamente materialista (ver seção II. 4).

(c) A maneira como Wigner formulou a questão pode ser identificada com o problema da indução: o que justifica estender uma lei que descreve adequadamente um domínio restrito de objetos para um domínio mais amplo? Seguindo David Hume, o filósofo inglês John Stuart Mill ponderou sobre esta questão, no contexto de sua filosofia empirista, e concluiu postulando a existência de um princípio de *uniformidade* do curso da natureza. Ou seja, a natureza tem uma tendência a ser uniforme, a se repetir no tempo e no espaço, de forma que se observamos uma regularidade em um número finito de objetos, estamos usualmente justificados em generalizar esta regularidade ou lei de maneira universal, para *todos* os objetos daquela espécie.

(d) Uma abordagem menos empirista e mais "construtivista", ou seja, uma postura que considera que a experiência é ativamente formatada pela mente humana (ver seção IV.2), como a do filósofo Immanuel Kant, não apela para um princípio de uniformidade *na* natureza,

---

[63] WIGNER, E.P. (1960), "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", *Communications in Pure and Applied Mathematics 13*, 1-14, republicado em WIGNER (1967), *Symmetries and reflections*, Indiana U. Press, Bloomington, pp. 222-37. Ver pp. 225, 229. Disponível na internet. Tradução disponível no saite do curso.

mas sim para um princípio *interno* ao sujeito do conhecimento, para a maneira como o aparato cognitivo do sujeito estrutura os dados do mundo externo, maneira esta que seria matemática. O que Mill consideraria a uniformidade da natureza é para Kant um pré-requisito *a priori* de qualquer experiência possível, expressa como uma "categoria do entendimento". A efetividade da matemática seria uma consequência necessária da maneira como nossa mente constroi sua representação do mundo.[64]

(e) Uma última solução, consistente tanto com o realismo científico quanto com o nominalismo matemático, está relacionada com as concepções de Hilbert e Poincaré de que a existência matemática é *livre de contradição*.[65] A proposta é que a matemática tem, em sua essência, uma propriedade $X_{mat.}$ que corresponde a uma propriedade física geral $X_{fis.}$ possuída pela realidade física. No relato de Mill, a propriedade física correspondente seria a uniformidade da natureza, que seria expressa por certas regularidades da descrição matemática. Seguindo a sugestão de Hilbert e Poincaré, pode-se argumentar que a *consistência* das teorias matemáticas usadas nas ciências naturais ($X_{mat.}$) corresponderia a uma certa propriedade de "consistência" ou "ausência de contradição" ($X_{fis.}$) da realidade natural. Se de fato se puder estipular $X_{mat.}$ e $X_{fis.}$, então poder-se-ia explicar porque a matemática funciona tão bem no domínio das ciências naturais, e por que outros sistemas formais (diferentes da matemática) não o fazem.

6. Números Imaginários descrevem a Realidade Física?

Acabamos de discutir a questão da aplicação da matemática para descrever a realidade, e desembocamos novamente em diferentes visões sobre a ontologia das entidades matemáticas. Uma outra questão relacionada à aplicação da matemática é se os números imaginários descrevem a realidade. A visão convencional é que números imaginários não são nunca usados para descrever aspectos observáveis do mundo, apesar de eles poderem ser úteis nos passos intermediários de cálculos sobre esses aspectos observáveis. Os números reais, por outro lado, descreveriam o que observamos.

Esta visão convencional tem seus problemas. Em primeiro lugar, em que sentido números reais podem ser atribuídos a grandezas observáveis, já que, no mundo físico concreto, não há maneira de distingui-los dos números racionais? Quais classes de números podemos observar?

Há 13 pares de nervos cranianos em cada mamífero, mostrando que é direta a aplicação de números naturais para objetos bem definidos e distintos. Um pitagórico poderia afirmar com segurança que números naturais existem no mundo físico.

E quanto aos números inteiros negativos? A quais coisas eles podem ser aplicados? A altitude do Mar Morto é –378 metros, onde o sinal negativo indica que ele está abaixo do nível de referência dos oceanos. Mas se o nível de referência fosse o centro da Terra, a altitude seria sempre um número positivo. O sinal negativo apenas exprime uma escolha convencional de referência: por que, então, o pitagórico deveria acreditar na existência de números negativos no mundo físico?

Números racionais podem ser aplicados de maneira direta para exprimir razões entre comprimentos (expressos como números inteiros, por exemplo múltiplos inteiros de uma

---

[64] Ver SILVA, JAIRO J. (2011), "On the nature of mathematical knowledge", in Krause, D. & Videira, A.A.P. (orgs.), *Brazilian studies in philosophy and history of science* (Boston Studies in the Philosophy of Science 290), Springer, Dordrecht, pp. 151-60. A uniformidade da natureza aparece em MILL ([1843] 1979), op. cit. (nota 46), Livro III, cap. III, §1.

[65] HILBERT, D. (1902), "Mathematical problems", *Bulletin of the American Mathematical Society 8*, 437-79, ver p. 448. POINCARÉ, H. (1908), *Science et méthode*, Flammarion, Paris, cap. III, §4.

unidade básica, como o milímetro), como em cordas musicais, onde o intervalo de quinta corresponde à razão 3/2 entre os comprimentos de duas cordas.

E os números reais? O número real $\sqrt{2}$ descreveria de maneira exata o comprimento da diagonal de um quadrado de lados unitários, mas esse resultado não se aplica de maneira exata à realidade, onde há sempre pequenas imperfeições e flutuações. Assim, um número racional descreveria igualmente bem a diagonal de um quadrado concreto. Mesmo assim, os números reais são utilizados como base para as teorias físicas, então temos o costume de associar os resultados de medições reais a números reais.

De um ponto de vista nominalista, não há nada de errado em associar números reais ao mundo físico, pois ao fazer isso não estaríamos pressupondo que os números reais "existem" no mundo físico (como diria um neopitagórico), mas simplesmente que os números reais, entendidos como uma construção mental abstrata, podem ser *aplicados* de maneira coerente ao mundo físico.

E o que dizer dos números complexos? Os números imaginários, múltiplos de *i*, ou $\sqrt{-1}$, surgiram com o matemático italiano Gerolamo Cardano, em 1545, como soluções de equações cúbicas. Em 1637, René Descartes os chamou de "imaginários", indicando que não os levava à sério. No entanto, Abraham de Moivre (1730) e Leonhard Euler (1748) os estudaram, chegando à notável equação que tanto fascinou o jovem Richard Feynman: $e^{i\pi} = -1$. Isso levaria à noção de plano complexo, formulado por Caspar Wessel (1797), Carl Friedrich Gauss (1799) e Jean Argand (1806), que representa os números complexos como a soma de um número real e um imaginário, $a + bi$, em um plano.

Números complexos são muito úteis para descrever as fases relativas de movimentos oscilatórios, o que levou alguns físicos[66] a considerar que eles não podem ser eliminados da física teórica, especialmente das teorias de calibre, pondo-os em pé de igualdade com os números reais. Tal atitude parece sensata. Do ponto de vista do nominalismo matemático, a questão é se um conceito matemático é útil na ciência, e não se ele "de fato existe", como tenderia a dizer um pitagórico. É verdade que, na teoria quântica usual, nenhum valor esperado calculado pela teoria envolve termos imaginários, o que significa apenas que os números reais (ou racionais) são suficientes para representar valores medidos, e não que estes tenham "mais realidade" que os números complexos.

Outro caso interessante é o de *probabilidades negativas*. Feynman[67] salientou que estes números nunca podem ser aplicados à realidade, apesar de serem uma ferramenta útil nos passos intermediários de um cálculo de grandezas observáveis da natureza. No entanto, pode-se interpretar uma probabilidade negativa como indicando que uma situação tem um *grau de impossibilidade* maior do que uma situação cuja probabilidade é simplesmente zero. Em outras palavras, pode-se classificar diferentes cenários logicamente possíveis de acordo com um certo parâmetro α, e tal parâmetro pode aparecer em uma equação exprimindo o grau de possibilidade do cenário: o valor negativo da probabilidade de uma situação indicaria o quão distante o cenário com parâmetro α está do cenário com probabilidade zero.

---

[66] WIGNER ([1960] 1967), op. cit. (nota 63), pp. 225, 229. YANG, C.N. (1987), "Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger", in Kilmister, C.W. (org.), *Schrödinger: centenary celebration of a polymath*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 53-64. PENROSE, R. (2004), *The road to reality: A complete guide to the laws of the universe*, Vintage, Nova Iorque, pp. 67, 1034-6.

[67] FEYNMAN, R.P. (1987), "Negative probability", in Hiley, B.J. & Peat, F.D. (orgs.), *Quantum implications*, Routledge, London, pp. 235-48.