FILOSOFIA DA MATEMÁTICA PARA FÍSICOS

Osvaldo Pessoa Júnior

A OBJETIVIDADE DA MATEMÁTICA

Se pudéssemos voltar no tempo, para 10.000 anos atrás, e chacoalhássemos um pouco a Terra, e então contrafatualmente a humanidade pudesse evoluir a partir desta condição inicial levemente diferente, será que a humanidade chegaria às mesmas estruturas matemáticas que ela chegou em nosso mundo atual? Muito certamente, se nossa espécie não fosse destruída por algum cataclisma, ela teria chegado ao teorema de Pitágoras, às seções cônicas, ao número zero, à álgebra, à geometria analítica e ao cálculo. Poderíamos imaginar cem mundos diferentes ramificando em histórias causalmente possíveis. (PESSOA JÚNIOR, 2009) Certamente a ordem em que os conceitos e resultados matemáticos surgissem seria diferente em muitas histórias: uma investigação dos caminhos possíveis pelos quais a matemática poderia ter sido construída seria deveras interessante! Provavelmente, na maioria desses mundos, chegar-se-ia aos números imaginários, aos conjuntos transfinitos, à incompletude da aritmética, à análise não standard e à constante de Chaitin, mas pressões circunstanciais e culturais certamente teriam atrasado ou adiantado o surgimento de alguns desses conceitos.

Em suma, a maior parte da matemática seria a mesma na maioria desses cenários contrafatuais, ou mesmo em mundos causalmente possíveis que se ramificariam em tempos muito anteriores a 10.000 anos. Nesse sentido, pode-se afirmar que a matemática é objetiva. Mas como se pode explicar esta objetividade?

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA PARA FÍSICOS

Há vários anos venho ministrando uma disciplina optativa de Filosofia da Física para licenciandos e graduandos em Física da Universidade de São Paulo, e alguma atenção tem sido dada à filosofia da matemática. Algumas questões que são de interesse aos filósofos profissionais, como a discussão sobre a indispensabilidade da matemática para a ciência (COLYVAN, 2011), tende a gerar mais bocejos nos alunos do que perguntas. Mas outras questões, concernentes à aplicação da matemática na física, despertam maior interesse. Assim, mencionarei três questões que os estudantes de física tendem a achar interessantes.

A primeira questão é a da ontologia: todo mundo gosta de discutir sobre o que existe e o que não existe, e na filosofia das ciências físicas esta é um problema recorrente. Existem de fato forças? O campo magnético existe, ou é apenas um epifenômeno das correntes elétricas? O potencial vetor eletromagnético não é mesmo real, como nos ensinam, mesmo levando em conta o efeito quântico descrito por Aharonov-Bohm? O que dizer do referente da função de onda quântica? Os invariantes da teoria da relatividade restrita têm estatuto ontológico superior, mesmo não sendo diretamente observáveis? E o espaço e o tempo, são densos ou discretos?

Nessas discussões, uma distinção fundamental deve ser traçada entre realismo científico e "fenomenalismo" (termo que englobaria diversas formas de antirrealismo científico). Deveria a ciência tentar explicar a parte observável da realidade, postulando entidades e estruturas inobserváveis (realismo), ou deveria ela se ocupar apenas de descrever as observações de maneira econômica, fazendo previsões bem corroboradas e "salvando os fenômenos"?

As outras duas questões são relativas à aplicação da matemática na ciência. A primeira se pergunta por que a matemática é tão útil nas ciências naturais (seção 4), e a segunda investiga quais são as entidades matemáticas que devem ser usadas para descrever a física (seção 6).

O QUE SÃO AS ENTIDADES MATEMÁTICAS?

Partindo da tese de que a matemática é objetiva, vista na seção 1, cabe agora buscar uma explicação para esta objetividade, o que nos leva para o problema ontológico das entidades matemáticas.

Uma classe de concepções na filosofia da matemática considera que a melhor explicação para a objetividade da matemática é que as entidades e estruturas matemáticas são reais, no sentido de que têm existência independente de seres pensantes. Tradicionalmente, há duas variedades deste realismo matemático: (i) as entidades matemáticas de fato existem no mundo físico, ou (ii) subsistem, fora do espaço e do tempo, no mundo das ideias universais. Esta segunda visão é a bem conhecida concepção de Platão, restrita às entidades matemáticas, e a primeira é a concepção da escola de Pitágoras, recentemente defendida de forma radical por Tegmark (2007), ao afirmar que "nosso mundo físico é uma estrutura matemática abstrata".

A classe de concepções que se opõem a essas formas de realismo matemático pode ser chamada genericamente de "nominalismo". Bueno (2010) apresenta uma classificação detalhada de diferentes formas de realismo e nominalismo matemáticos. Grosso modo, a visão nominalista afirma que a objetividade da matemática é uma consequência da estrutura do cérebro humano (ou de qualquer ser inteligente), ou da maneira como a mente está ligada ao mundo, ou das regras do jogo matemático. As entidades matemáticas seriam projeções da mente, que podem estar associadas à realidade física, mas segundo esta visão seria sem sentido afirmar que a matemática existe fora da mente de seres inteligentes ou que subsiste em um domínio externo à mente e suas projeções.

Vale notar que a questão do realismo na ciência, mencionada na seção 2, é bem diferente da questão do realismo na matemática. A primeira discute a realidade de entidades físicas concretas, postuladas por teorias científicas, mas não observáveis, e que existiriam independentemente dos seres humanos. Já o realismo na matemática postula a realidade de estruturas matemáticas abstratas, cuja realidade seria independente da existência de seres inteligentes, ou que existiriam no próprio mundo físico (pitagorismo) ou que subsistiriam numa dimensão para além do tempo e do espaço (platonismo).

A UTILIDADE DA MATEMÁTICA

Depois de discutir a ontologia da matemática, uma questão predileta para os físicos é por que a matemática é tão útil na ciência, ou como colocou Eugene Wigner, como explicar a "desarrazoada efetividade" [*the unreasonable effectiveness*, a eficácia não razoável] da matemática nas ciências naturais. Esta questão pode ser considerada um "problema de aplicação". (BUENO, 2010, p. 69) O físico húngaro-americano salientou dois papéis para a matemática na física. O papel mais fundamental seria exprimir as leis da natureza. Já o papel mais prático, que ele chama "matemática aplicada", seria ser um instrumento para avaliar os resultados dessas leis, ao inserir condições iniciais e de contorno, calcular previsões numéricas, e compará-las com os números obtidos nas medições experimentais. (WIGNER, 1967, p. 228) O que impressionou Wigner foi o primeiro papel: por que as leis matemáticas da natureza funcionam tão bem? Mais especificamente, como um cientista, como Newton, trabalhando com relativamente pouca evidência empírica, é capaz de formular uma lei da gravitação que funciona tão bem para um domínio tão vasto e inesperado da realidade física?

(a) A resposta mais simples a este problema é fornecido pelos pitagóricos, como Tegmark, que explicariam essa efetividade pelo fato de a natureza *ser* intrinsecamente matemática, de ela *ser constituída* por estruturas matemáticas. Assim, fica explicado por que o cientista tem tanto sucesso em descrever a natureza com a linguagem matemática, e em fazer novas previsões. Na variante platonista, as formas das coisas seriam cópias imperfeitas das ideias matemáticas puras e perfeitas.

(b) A resposta de Wigner foi um pouco desapontadora, pois ele considerava que a efetividade da matemática é um "milagre". Nessa sua atitude, que pode ser chamada de *misteriana*, ele considerava até "difícil acreditar que nosso poder de raciocínio foi levado, pelo processo de seleção natural de Darwin, à perfeição que ele parece possuir". (WIGNER, 1967, p. 224) Sua posição tem sido descrita como "mentalista", indicando que claramente não tinha uma visão de mundo estritamente materialista.

(c) A maneira como Wigner formulou a questão pode ser identificada com o problema da indução: o que justifica estender uma lei que descreve adequadamente um domínio restrito de objetos para um domínio mais amplo? Seguindo David Hume, o filósofo empirista John Stuart Mill ponderou sobre esta questão, no contexto de sua filosofia empirista, e concluiu postulando a existência de um princípio de uniformidade do curso da natureza. (MILL, 1843, Livro III, p. 175) Ou seja, a natureza tem uma tendência a ser uniforme, a se repetir no tempo e no espaço, de forma que se observamos uma regularidade em um número finito de objetos, geralmente (mas nem sempre, é claro) estaremos seguros em generalizar esta regularidade ou lei de maneira universal, para todos os objetos daquela espécie.

(d) Uma abordagem menos empirista e mais "construtivista", ou seja, uma postura que considera que a experiência é ativamente formatada pela mente humana, como a do filósofo Immanuel Kant, não apela para um princípio de uniformidade *na* natureza, mas sim para um princípio *interno* ao sujeito do conhecimento, para a maneira como o aparato cognitivo do sujeito estrutura os dados do mundo externo, maneira esta que seria matemática. O que Mill consideraria a uniformidade da natureza é para Kant um pré-requisito *a priori* de qualquer experiência possível, expressa como uma "categoria do entendimento". A efetividade da matemática seria uma consequência necessária da maneira como nossa mente constrói sua representação do mundo (SILVA, 2011).

(e) Eu gostaria de articular uma solução adicional, consistente tanto com o realismo científico quanto com o nominalismo matemático. A ideia é simples, e está relacionada com as concepções de Hilbert (1902, p. 448) e Poincaré (1908, p.162) de que a existência matemática é livre de contradição. A proposta é que a matemática tem, em sua essência, uma propriedade $X_{mat.}$ que corresponde a uma propriedade física geral $X_{fis.}$ possuída pela realidade física. No relato de Mill, a propriedade física correspondente seria a uniformidade da natureza, que seria expressa por certas regularidades da descrição matemática.

Seguindo a sugestão de Hilbert e Poincaré, pode-se argumentar que a consistência das teorias matemáticas usadas nas ciências naturais ($X_{mat.}$) corresponderia a uma certa propriedade de "consistência" ou "ausência de contradição" ($X_{fis.}$) da realidade natural. Se de fato se puder estipular $X_{mat.}$ e $X_{fis.}$, então poder-se-ia explicar por que a matemática funciona tão bem no domínio das ciências naturais, e por que outros sistemas formais (diferentes da matemática) não o fazem.

O QUE NÃO É MATEMÁTICA?

Para que o argumento, apresentado no item (e) acima, possa funcionar, é preciso descrever o gênero do qual a matemática é uma espécie. Parece razoável considerar entidades e sistemas matemáticos como um subconjunto dos "construtos abstratos", que também incluiriam: (i) construtos contraditórios, como o quadrado redondo e outros dos "objetos impossíveis" de Meinong; (ii) construtos triviais; (iii) construtos mal definidos; (iv) personagens fictícios, como Sherlock Holmes e Macunaíma.

Nenhum desses construtos abstratos têm lugar na ciência. As classes (i) e (iii) carecem de consistência; a classe (ii) carece de riqueza ou complexidade; os itens da classe (iv) carecem de generalidade, usando uma linguagem factual para entidades de fato inexistentes.

Uma outra classe que poderia ser incluída seriam (v) os conceitos universais, como os de triangularidade, brancura e justiça. Alguns deles podem ter aplicação na ciência, como os conceitos envolvidos em leis científicas, mas neste caso eles seriam considerados matemáticos.

Uma classe adicional seria (vi) a lógica. Sistemas lógicos são geralmente consistentes, mas seu uso na ciência não é tão notável quanto a efetividade da matemática, talvez porque a lógica clássica seja suficientemente adequada para todas as teorias científicas (apesar de as lógicas não clássicas poderem ser usadas em interpretações alternativas de teorias físicas, especialmente na mecânica quântica), ou talvez porque a riqueza e complexidade dos sistemas lógicos não são muito relevantes para a maior parte das ciências naturais (ao contrário de sua importância na computação, nos fundamentos da matemática e outras disciplinas relacionadas).

A tese apresentada no item (e) da seção anterior afirma que dentre todos esses objetos abstratos, aqueles que satisfazem uma propriedade de consistência $X_{mat.}$ são aqueles que têm aplicação na ciência, que são somente os objetos matemáticos e lógicos. Vale a pena darmos um exemplo de um sistema abstrato não trivial que não satisfaz a consistência: os números ternários de Hamilton. Sua ideia original foi estender os números complexos, descritos nas duas dimensões do plano de Argand, para três dimensões. No entanto, na álgebra resultante não se consegue definir a divisão entre números de maneira consistente. (BAEZ; HUERTA, 2011, p. 70-1) Hamilton só conseguiu resolver o problema ao introduzir uma quarta dimensão, o que resultou em sua famosa teoria dos quatérnions. Segundo a visão nominalista adotada no presente artigo, os números ternários e os quatérnions teriam o mesmo estatuto: são ambos construções abstratas bem definidas. No entanto, os números ternários carecem de uma propriedade, $X_{mat.}$, tornando-os inúteis na ciência, ao contrário dos quatérnions.

Para finalizar, devo admitir que a identificação de $X_{mat.}$ com a propriedade de consistência é uma hipótese preliminar, a ser refinada no futuro. Continuo sustentando que a melhor explicação para o sucesso da matemática na ciência é o fato de ela ser um construto abstrato com uma propriedade $X_{mat.}$ que corresponde a uma propriedade análoga $X_{fís.}$ do mundo físico. Mas é ainda preciso refinar melhor qual é esta propriedade $X_{mat.}$.

Por exemplo, há as lógicas paraconsistentes, que não satisfazem a consistência, mas que têm aplicação em sistemas reais. (PRIEST; TANAKA, 2009) O que essas lógicas têm é uma regra que impede a trivialidade, ou seja, a possibilidade de derivar qualquer conclusão a partir de uma contradição. Apesar de tais lógicas terem aplicações práticas, resta verificar se elas podem ser aplicadas à realidade física, ou apenas a situações envolvendo falta de conhecimento humano.

NÚMEROS IMAGINÁRIOS DESCREVEM A REALIDADE?

Descrevemos diferentes visões sobre a ontologia das entidades matemáticas, e discutimos uma primeira questão de aplicação, de por que a matemática é tão útil nas ciências naturais. Uma segunda questão de aplicação, que é especialmente interessante para alunos de Física, é se os números imaginários descrevem a realidade. A visão convencional é que números imaginários não são nunca usados para descrever aspectos observáveis do mundo, apesar de eles poderem ser úteis nos passos intermediários de cálculos sobre esses aspectos observáveis. Os números reais, por outro lado, descreveriam o que observamos.

Esta visão convencional tem seus problemas. Em primeiro lugar, em que sentido números reais podem ser atribuídos a grandezas observáveis, já que, no mundo físico concreto, não há maneira de distingui-los dos números racionais? Quais classes de números podemos observar?

Há 13 pares de nervos cranianos em cada mamífero, mostrando que é direta a aplicação de números naturais para objetos bem definidos e distintos. Um pitagórico poderia afirmar com segurança que números naturais existem no mundo físico (mas não todos eles, se o universo for finito).

E quanto aos números inteiros negativos? A quais coisas eles podem ser aplicados? A altitude do Mar Morto é –378 metros, onde o sinal negativo indica que ele está abaixo do nível de referência dos oceanos. Mas se o nível de referência fosse o centro da Terra, a altitude seria sempre um número positivo. O sinal negativo apenas exprime uma escolha convencional de referência: por que, então, o pitagórico deveria acreditar em sua existência no mundo físico?

Números racionais podem ser aplicados de maneira mais direta para exprimir razões entre comprimentos (expressos como números inteiros, por exemplo, múltiplos inteiros de uma unidade básica, como o milímetro), como em cordas musicais, onde o intervalo de quinta corresponde à razão 3/2 entre os comprimentos de duas cordas.

E os números reais? O número real $\sqrt{2}$ descreveria de maneira exata o comprimento da diagonal de um quadrado de lados unitário, mas esse resultado não se aplica de maneira exata à realidade, onde há sempre pequenas imperfeições e flutuações. Ou seja, um número racional descreveria igualmente bem a diagonal de um quadrado concreto. Mesmo assim, os números reais são utilizados como base para as teorias físicas, então temos o costume de associar os resultados de medições reais a números reais.

De um ponto de vista nominalista, não há nada de errado em associar números reais ao mundo físico, pois ao fazer isso não estaríamos pressupondo que os números reais "existem" no mundo físico (como diria um neopitagórico), mas simplesmente que os números reais, entendidos como uma construção mental abstrata, podem ser *aplicados* de maneira coerente ao mundo físico.

E o que dizer dos números complexos? Eles são muito úteis para descrever as fases relativas de movimentos oscilatórios, o que levou alguns físicos, como Yang (1987) e Wigner (1967, p. 225, 229), a considerar que eles não podem ser eliminados da física teórica, especialmente das teorias de calibre, pondo-os em pé de igualdade com os números reais. Tal atitude parece sensata. Do ponto de vista do nominalismo matemático, a questão é se um conceito matemático é útil na ciência, e não se ele "de fato existe", como tenderia a dizer um pitagórico. É verdade que, na teoria quântica usual, nenhum valor esperado calculado pela teoria envolve termos imaginários, o que significa apenas que os números reais (ou racionais) são suficientes para representar valores medidos, e não que estes tenham "mais realidade" que aqueles.

Outro caso interessante é o de probabilidades negativas. Feynman (1987) salientou que estes números nunca podem ser aplicados à realidade, apesar de serem uma ferramenta útil nos passos intermediários de um cálculo de grandezas observáveis da natureza. No entanto, pode-se interpretar uma probabilidade negativa como indicando que uma situação tem um grau de impossibilidade maior do que uma situação cuja probabilidade é simplesmente zero. Em outras palavras, pode-se classificar diferentes cenários logicamente possíveis de acordo com um certo parâmetro a, e tal parâmetro pode aparecer em uma equação exprimindo o grau de possibilidade do cenário: o valor negativo da probabilidade de uma situação indicaria o quão distante o parâmetro a está do cenário com probabilidade zero.

AGRADECIMENTOS

Este texto foi apresentado em 24/08/2009 no evento *Science, Truth and Consistency – Celebrating Professor Newton da Costa's 80th Birthday*, realizado na Unicamp. Gostaria de agradecer Otávio Bueno, Jairo José da Silva e Edélcio Gonçalves por tentarem esclarecer meu ponto de vista sobre a filosofia da matemática. Dedico este modesto texto aos professores Newton da Costa e Fernando Bunchaft (*in memoriam*).

REFERÊNCIAS

BAEZ, J. C.; HUERTA, J. Os estranhos números da teoria das cordas. *Scientific American Brasil 109*, p. 68-73, 2011.

BUENO, O. Philosophy of mathematics. In: ALLHOFF, F. (Org.). *Philosophies of the Sciences.* Oxford: Wiley-Blackwell, 2010. p. 68-91. Disponível em: <http://www.as.miami.edu/personal/obueno/Site/Online_Papers_files/PhiOfMaths_FINAL.PDF>.

COLYVAN, M. Indispensability arguments in the philosophy of mathematics. In: Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2011. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/>.

FEYNMAN, R. P. Negative probability. In: HILEY, B. J.; PEAT, F. D. (Org.). *Quantum Implications.* London: Routledge, 1987. p. 235-48.

HILBERT, D. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*. n. 8, p. 437-479, 1902.

MILL, J. S. *Sistema de lógica dedutiva e indutiva.* 2.ed. Trad. J. M. Coelho. São Paulo: Abril Cultural, 1979. (Coleção Os Pensadores). Original em inglês: 1843.

PESSOA JÚNIOR, O. Scientific progress as expressed by tree diagrams of possible histories. In: MORTARI, C. A.; DUTRA, L. H. A. (Org.). *Anais do V Simpósio Internacional Principia.* Florianópolis: NEL-UFSC, 2009. p. 114-22. (Coleção Rumos da Epistemologia, n. 9)

POINCARÉ, H. *Science et Méthode.* Paris: Flammarion, 1908.

PRIEST, G.; TANAKA, K. Paraconsistent logic. In: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2009. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/logic-paraconsistent/>.

SILVA, J. J. On the nature of mathematical knowledge. In: KRAUSE, D.; VIDEIRA, A. A. P. (Org.). *Brazilian Studies in Philosophy and History of Science.* Dordrecht: Springer, , 2011. p. 151-60. (Boston Studies in the Philosophy of Science 290)

TEGMARK, M. The mathematical universe. *Foundations of Physics*, n. 38, p. 101-50, 2007.

WIGNER, E. P. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. In: *Symmetries and Reflections*. Bloomington: Indiana University Press, 1967. p. 222-37. Publicado originalmente em *Communications in Pure and Applied Mathematics 13*, 1960, 1-14.

YANG, C. N. Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger. In: KILMISTER, C. W. (Org.). *Schrödinger*: Centenary Celebration of a Polymath. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. p. 53-64.

CIÊNCIA, FILOSOFIA E POLÍTICA

UMA HOMENAGEM A FERNANDO BUNCHAFT

OLIVAL FREIRE JÚNIOR
SAULO CARNEIRO
(Orgs.)

EDUFBA