

# Uma axiomatização operacional da teoria quântica

Oswaldo Pessoa Jr.<sup>†</sup>

## Resumo

Apresenta-se um esboço de uma axiomatização operacional da teoria quântica, com postulados mais ligados a questões empíricas, visando uma abordagem mais didática à física quântica e que não pressuponha a teoria matemática dos espaços vetoriais complexos. Como pano de fundo, faz-se uma comparação das axiomatizações empiristas e dedutivistas. Após apresentar brevemente os tradicionais sete postulados da mecânica quântica, próximos da abordagem dedutivista, propomos seis postulados mais operacionais, incluindo um que destaca a existência de estados não-separáveis (emaranhados) de dois objetos quânticos.

## 1. Duas abordagens para a axiomatização de teorias científicas

A axiomatização da geometria de Euclides foi o paradigma do conhecimento seguro ao longo de dois milênios. Sistemas filosóficos do séc. XVII, como os de Descartes e Espinosa, buscavam partir de postulados auto-evidentes para então deduzir teoremas de seu sistema. Na física, Descartes e Newton construíram seu sistema de mundo com base em postulados que, se não eram auto-evidentes ou intuitivos, eram relativamente simples, como o princípio de inércia e o de ação e reação.

Duas características almeçadas para esses sistemas axiomáticos eram a segurança dos postulados fundamentais e o rigor das deduções. A partir da segunda metade do séc. XIX, o peso diferente atribuído a cada uma dessas características gerou dois polos distintos de axiomatizações (com ampla gama de casos intermediários): a abordagem *empirista* ou *operacional* versus a abordagem *dedutivista* (geralmente associada a um realismo semântico, mas também consistente com o instrumentalismo). A primeira enfatiza a segurança dos postulados, que no caso das ciências empíricas está associado à observação ou aos “fatos”, e buscam-se postulados que reflitam diretamente operações experimentais e observações objetivas. Já a abordagem dedutivista aceita que o sistema axiomático se baseie em hipóteses não diretamente comprováveis, desde que as deduções feitas a partir desses postulados descreva corretamente as observações empíricas.

A axiomatização informal que Newton apresentou nos *Principia* era bastante próxima da abordagem empirista. Cada axioma pretendia exprimir uma lei fundamental do Universo, ou seja, pretendia ter um importante conteúdo físico, mesmo que houvesse redundância: a 1ª lei é um caso particular da 2ª lei, para força resultante igual a zero. No séc. XIX, Mach, Kirchhoff e Hertz, entre outros, buscaram fazer uma revisão dos postulados newtonianos para torná-los ainda mais condizentes com o ideal empirista de reduzir uma teoria científica a observações minimamente impregnadas de teorização. Assim, o conceito de “força” foi considerado como sendo não diretamente observável, e passou a ser definido a partir de massa e aceleração.

Em suma, as abordagens mais empiristas ou operacionais de axiomatização de teorias científicas buscam ao máximo definir apenas conceitos observacionais, minimizando a

<sup>†</sup> Departamento de Filosofia, Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo (USP). Para contatar ao autor, por favor, escreva a: [opessoa@usp.br](mailto:opessoa@usp.br).

introdução de termos teóricos (que não designam entidades observáveis) e buscando construir as estruturas matemáticas passo a passo com a definição dos conceitos. Costuma haver nos partidários deste estilo uma forte preocupação didática. No séc. XX, Herbert Simon (1970) adotou tal perspectiva para a axiomatização da mecânica clássica (ver discussão em Dorling 1977).

Em oposição a isso, abordagens dedutivistas seguem um estilo que foi explorado de maneira rigorosa por McKinsey, Sugar & Suppes (1953). Em sua axiomatização da mecânica clássica, eles encararam o conceito de força de maneira realista, mesmo adotando um tom geral instrumentalista, e aceitaram que se pudesse definir esse conceito de modo independente das observações. Redundâncias como aquela apontada entre a 1ª e a 2ª leis de Newton eram rigorosamente eliminadas. Tal abordagem se alia com a chamada concepção semântica de teorias (ver, por exemplo, Suppe 1989), que incorpora toda uma teoria matemática (por exemplo, a da geometria simplética na mecânica hamiltoniana) na base da axiomatização. Pode-se dizer que esta abordagem prioriza mais o rigor lógico do que a preocupação didática.

## 2. A axiomatização dedutivista da teoria quântica

As axiomatizações da teoria quântica não-relativística (por exemplo, d'Espagnat 1976, pp. 14-20, Cohen-Tannoudji *et al.* 1977, pp. 162-163, 213-225, Isham 1995, pp. 84-85) geralmente seguem a versão pioneira de von Neumann (1932), que é apontada como uma antecipação da abordagem dedutivista na axiomatização de teorias científicas, e da concepção semântica a teorias científicas (Suppe 1989, p. 3).

O 1º postulado associa cada *estado puro* de um sistema quântico a um vetor em um espaço de Hilbert (espaço vetorial complexo). Implícito nesta associação está o princípio quântico de superposição: dados dois estados permitidos do sistema, qualquer combinação linear dos vetores associados fornece um vetor associado a um estado permitido. Implícito também está a existência de estados emaranhados de duas partículas, representados por vetores não fatoráveis. O 2º postulado associa uma grandeza fisicamente *observável* a um operador auto-adjunto no espaço de Hilbert, e os *resultados* possíveis da medição deste observável são associados pelo 3º postulado aos autovalores do operador. O 4º postulado exprime as *probabilidades* de se obterem os diferentes resultados possíveis da medição do observável. O 5º é o *postulado da projeção*, que estipula qual o estado final após uma certa medição que forneceu um resultado específico. O 6º postulado é a *equação de Schrödinger*, que descreve a evolução temporal de um sistema fechado, antes da realização de uma medição. Por fim, um 7º postulado é adicionado (d'Espagnat 1976, pp. 27-28), afirmando que partículas indistinguíveis (ou seja, tendo mesma massa, carga etc.) devem ser descritas por vetores de estado simétricos (no caso de bósons, com spin inteiro) ou anti-simétricos (no caso de férmions, com spin semi-inteiro).

Tal axiomatização é bastante clara e útil para quem domina o formalismo matemático da teoria. Conforme já mencionado, uma característica bastante apreciada, dentro da concepção semântica de teorias, é o fato de que uma teoria matemática completa (a dos espaços vetoriais complexos) é incorporada na base da axiomatização.

No entanto, tal abordagem não é facilmente assimilada por alunos que estão aprendendo física quântica, e que não possuem a adequada preparação matemática. Vários dos conceitos apresentados, como os de estado, autovalor, autovetor e ortogonalidade, são primeiramente definidos em termos matemáticos, o que traz dificuldades para esses estudantes. Alguns princípios importantes, como o de superposição ou o de emaranhamento de estados, acabam não recebendo destaque, por serem consequências da estrutura matemática subjacente. Além disso, nada é dito sobre o domínio de aplicação da teoria: o que é um "sistema quântico"? Quais são as teses empíricas da teoria, que poderiam ser falseadas, e quais são as definições, aceitas de maneira convencional?

## 3. Conceitos observacionais da teoria quântica

Na seção anterior fizemos menção aos sete postulados do formalismo matemático, da formulação canônica da física quântica. O problema que se coloca é se é possível exprimir esses postulados de uma maneira menos matemática e mais intuitiva para o aluno do ensino médio e superior.

Uma primeira consideração é que o formalismo matemático da mecânica quântica está distante da realidade à qual temos acesso em um laboratório de física. O espaço de vetores de estado, a equação de Schrödinger, o postulado da projeção, operadores e autoestados não correspondem a nada que possa ser diretamente observado no laboratório. Nesse sentido, os conceitos envolvidos costumam ser chamados de termos "teóricos", participando de leis teóricas, em oposição aos termos "de observação" ou "observacionais", envolvidos em leis empíricas, que correspondem de maneira mais íntima ao que é observado. E quais são os termos observacionais da teoria quântica?

Um primeiro conceito a ser mencionado é o de *autovalores* (3º postulado), que corresponde aos *resultados* possíveis de uma medição quântica, em qualquer unidade escolhida. O outro termo observacional que faz a ligação entre a teoria e os experimentos está relacionado com a *probabilidade* de se obter um certo resultado de medição (4º postulado), o que na prática é fornecido por uma contagem de *frequência relativa* (que envolve um número finito de observações, e portanto é apenas uma aproximação à probabilidade). De acordo com o 4º postulado, a probabilidade é obtida como o módulo quadrado do produto escalar dos vetores representando o estado do sistema e o autoestado (associado ao autovalor em questão). Para uma representação gráfica do contato entre termos observacionais e base empírica, e da estrutura da teoria quântica, ver Pessoa Jr. (2003, p. 64).

Como apresentar, de uma maneira não matemática para os alunos, os conceitos de estado e autoestado, usados também nos postulados 1º e 5º, e o conceito de observável, usado no 2º postulado?

O ponto de partida é caracterizar qual o *sistema físico* a ser analisado. Pode ser um feixe de luz oriundo de um laser, uma coleção de átomos emitidos de um forno, etc. Tal sistema físico envolve uma entidade, geralmente de natureza microscópica (luz, átomo, etc.), caracterizada por certos parâmetros (frequência, velocidade, temperatura, etc.).

Tal sistema físico é considerado *quântico* se as medições realizadas fornecerem resultados "quantizados", ou seja, transferirem pacotes discretos de energia para o detector, e tais pacotes forem localizadas de maneira pontual (em medições sensíveis à posição do objeto microscópico). Além disso, para distinguir um sistema quântico de um sistema descrito pela mecânica clássica de partículas, é preciso que o sistema quântico seja constituído de ondas de matéria ou ondas eletromagnéticas. A característica ondulatória de um objeto quântico aparece ao se variarem as fases de diferentes componentes do objeto quântico espalhado, gerando franjas de interferência ou batimentos quânticos. É possível definir quase todas as propriedades de um sistema essencialmente quântico apenas considerando que se trata de uma onda material (ou eletromagnética, ou de outro bóson) com quantização na detecção. Dessa forma, fenômenos quânticos como o princípio de incerteza e o tunelamento podem ser entendidos a partir de seus congêneres ondulatórios clássicos. Discutiremos isso em um trabalho posterior, no qual analisaremos a interpretação ondulatória realista com colapsos, mas vale mencionar que pelo menos dois outros traços seriam necessários para a adequada caracterização de sistemas quânticos: o emaranhamento quântico (envolvendo dois ou mais quanta) e a distinção entre bósons e férmions (o postulado 7º mencionado acima).

O formalismo que se segue se aplica a "estados puros", que se referem a objetos quânticos individuais ou, por extensão, a uma coleção de objetos individuais independentes preparados no mesmo estado. Para simplificar, consideraremos que um sistema quântico é microscópico

(melhor seria dizer “nanoscópico”) e que o aparelho de medição é macroscópico (mais de bilhões de vezes maior que o objeto quântico).

A caracterização operacional de um estado costuma ser feita a partir de duas estratégias: (a) o estado corresponderia a um arranjo experimental que *prepara* o sistema estudado de uma certa maneira; (b) o estado forneceria todas as informações que permitiriam descrever corretamente as probabilidades de resultados de *medições*, para quaisquer observáveis que forem medidos. No caso da física quântica, há uma convergência dessas duas estratégias. Daremos prioridade à definição (b).

O que é um autoestado? É um estado para o qual se pode montar um detector de tal forma que a probabilidade de detecção seja 1. E o que é um observável? Nada mais do que o conjunto de todos os autoestados e seus autovalores correspondentes (isso é expresso de maneira matemática pelo teorema espectral de von Neumann; ver Pessoa Jr. 2003, p. 69).

#### 4. Uma axiomatização operacional da teoria quântica

Façamos uma lista mais cuidadosa dessas definições operacionais e de quatro postulados da teoria quântica, expressos sem uso de simbolismo matemático e sem preocupação com o rigor formal:

*Definições 1* (experimentais):

*Def. 1a:* Uma *preparação* envolve a geração de um ou mais objetos físicos por meio de um instrumento científico ou por processos naturais.

*Def. 1b:* Uma *análise experimental* consiste de uma certa disposição de analisadores, filtros e outros dispositivos macroscópicos com os quais o objeto quântico interage antes de ser detectado.

*Def. 1c:* Uma *medição* é completada quando a preparação e análise experimental são seguidas pelo registro macroscópico em um ou mais detectores. (Iremos supor que a eficiência dos detectores é de 100%.)

*Postulado 1 (empírico):* Existem objetos físicos microscópicos que:

- Ao serem medidos individualmente, fornecem resultados “quantizados”, ou seja, transferem pacotes discretos de energia para o detector, e se manifestam de maneira localizada ou pontual. (Propriedade de quantização)
- Ao serem medidos coletivamente (sem modificação da preparação ou análise experimental), em situações em que mais de um detector pode disparar, os valores obtidos são “flutuantes” ou aleatórios, ou seja, não é possível prever com certeza o resultado da medição, mas apenas de maneira probabilista. (Propriedade de imprevisibilidade)
- Em medições coletivas, em que o sistema está sujeito a variações nas fases nos diferentes feixes (ou também variações de fase no tempo), resultam franjas de interferência ou batimentos quânticos. (Propriedade de serem ondas materiais ou bosônicas)

Este primeiro postulado é “empírico”, ou seja, ele estabelece um fato observado a respeito do mundo, que é importante para determinar o domínio de aplicação dos postulados restantes.

*Def. 2:* Um *sistema quântico* consiste de um ou mais objetos microscópicos que satisfazem o postulado empírico.

*Def. 3:* O *estado* de um sistema quântico preparado é definido pelo conjunto de resultados (no limite de muitas medições), variando-se a análise experimental de todas as maneiras possíveis.

Assim: (a) duas preparações geram o mesmo estado quântico se os resultados de quaisquer medições para as duas preparações forem estatisticamente indistinguíveis; (b) preparações perfeitamente semelhantes geram o mesmo estado; mas (c) um mesmo estado pode surgir a partir de preparações distintas. (Tal definição não deve proibir que possa haver especificações mais completas do estado do sistema, por meio de variáveis ocultas, que poderiam ser chamadas de estados “subquânticos”).

*Def. 4:* Um sistema quântico é *puro* se ele satisfizer os postulados abaixo. Isso engloba entidades individuais (não-emaranhadas), duas ou mais entidades emaranhadas, ou uma coleção não-interagente de tais sistemas individuais (ou sistemas emaranhados) puros preparados da mesma maneira. Caso contrário trata-se de uma *mistura estatística*. (Para o iniciante no assunto, tal distinção precisa ser trabalhada com exemplos cuidadosamente escolhidos. Note também que ainda não se definiu um estado emaranhado.)

*Def. 5:* Um *autoestado* é um estado para o qual existe uma análise experimental que leva um certo detector a disparar com probabilidade 1. Diz-se que este detector está associado ao autoestado.

*Def. 6:* Para cada preparação de um autoestado, associa-se um número chamado *autovalor*, que corresponde ao resultado do experimento, em unidades arbitrariamente escolhidas.

*Def. 7:* Dado um autoestado, define-se um autoestado *ortogonal* a ele a partir de uma preparação experimental que define outro autoestado, mas cuja probabilidade de ser medido no detector associado ao primeiro autoestado é nula. A relação de ortogonalidade é simétrica.

*Def. 8:* Dado um sistema quântico, o número máximo de autoestados mutuamente ortogonais forma uma *base completa de autoestados*. Esse número é chamado a *dimensão* do espaço de estados.

*Def. 9:* O *observável* sendo medido em um experimento consiste da base completa de autoestados e dos correspondentes autovalores. Cada observável é expresso matematicamente por meio de um *operador*  $\hat{Q}$  no espaço de estados.

A relação matemática entre o operador  $\hat{Q}$  associado ao observável, os autovalores  $\gamma_i$  e os autoestados  $|\phi_i\rangle$  é dado pelo teorema espectral:  $\hat{Q} = \sum_i \gamma_i \cdot \hat{P}[\phi_i]$ , onde  $\hat{P}[\phi_i]$  é o operador de projeção sobre  $|\phi_i\rangle$ .

*Def. 10:* *Observáveis incompatíveis* podem ser caracterizados a partir de dois autoestados que violam a ortogonalidade (Def. 7). A partir de cada um deles, pode-se construir uma base completa de autoestados (Def. 8), que por sua vez definem observáveis incompatíveis.

Em termos formais, os operadores  $\hat{Q}$  e  $\hat{R}$  (Def. 9) associados a observáveis incompatíveis não comutam, ou seja,  $\hat{Q}\hat{R} - \hat{R}\hat{Q} \neq 0$ . Definido-se os desvios padrão  $\Delta\hat{Q}$  e  $\Delta\hat{R}$ , Kennard mostrou em 1927 como se deriva a *relação de incerteza* de Heisenberg.

*Def. 11:* Um *estado acessível* é um estado que pode ser preparado em um arranjo experimental.

*Postulado 2: (Princípio quântico de superposição)* Qualquer estado acessível de um sistema quântico é ou um dos autoestados  $|\phi_i\rangle$  da base completa, ou uma combinação linear desses autoestados envolvendo quaisquer coeficientes  $a_i$  escolhidos de tal maneira que:

- A soma dos módulos quadrados dos coeficientes  $a_i$  é 1 (normalização).
- O módulo quadrado do coeficiente  $a_i$  fornece a *probabilidade* de disparar o detector associado ao autoestado  $|\phi_i\rangle$  (regra de Born), levando-se em conta a imprevisibilidade do resultado individual.
- Uma fase arbitrária pode multiplicar cada coeficiente, a menos de uma fase global.

O princípio de superposição afirma que qualquer combinação linear de autoestados é acessível.

*Postulado 3: (Transição de estados na medição)* Após uma medição:

- Se o objeto quântico não é absorvido pelo detector, o estado final do objeto geralmente é o autoestado associado ao detector (postulado da projeção). Esta situação é válida para uma classe limitada de medições, conhecida como medições “repetíveis” ou de “1o tipo”, incluindo medições diretas de posição.
- Há casos, conhecidos como medições “previsíveis” ou de “2o tipo”, em que o estado final não corresponde ao autoestado associado à medição. Um exemplo é a medição indireta do estado energético excitado de um átomo, por meio da emissão de um fóton (que é detectado diretamente).
- Se o objeto quântico é absorvido pelo detector, não há estado final do objeto.

*Postulado 4: (Evolução unitária)* Entre a preparação e a medição, há uma evolução contínua, determinista e reversível do estado quântico, regida pela equação de Schrödinger (ou outra equivalente), que depende do observável (“hamiltoniano”) associado à energia total do sistema fechado.

## 5. Discussão

A proposta informal de axiomatização apresentada acima, para um objeto quântico individual (não emaranhado), foi aplicada no contexto de ensino de física em Pereira *et al.* (2012), para um interferômetro de Mach-Zehnder. Outra ilustração didática pode ser feita com medições de componente de momento angular (spin) em um aparelho de Stern-Gerlach (Pessoa Jr. 2003, pp. 39-44). Resta determinar em que medida a presente proposta é consistente com abordagens operacionais logicamente mais sofisticadas, como a de Randall & Foulis (1970).

A presente abordagem operacional não incorpora a definição de espaço de Hilbert em seus axiomas. Assim, para dar conta do fenômeno do emaranhamento, um postulado separado deve ser introduzido, o que é consistente com o espírito mais empirista da abordagem operacional, que procura capturar em seus postulados as novidades empíricas da teoria. Conforme indicamos na seção 3, a teoria quântica para um único objeto quântico (coberto com os postulados operacionais 1 a 4) pode ser entendida como uma aplicação da teoria ondulatória clássica para ondas materiais (e bosônicas) adicionada ao fato de que as detecções são quantizadas.

Esta concepção, porém, fracassa ao serem consideradas dois ou mais (digamos  $N$ ) objetos quânticos interagentes, a não ser que se trabalhe com ondas em um espaço de configuração de  $3N$  dimensões. Esta grande novidade da teoria quântica, estados não-separáveis, foi explicitada pela primeira vez por Heisenberg (1926), ao estudar o átomo de hélio com dois elétrons emaranhados, foi usada por London & Heitler (1927) para descrever a ligação química covalente e explicar a “interação de troca”, esteve presente no argumento de Einstein, Podolsky & Rosen (1935), foi explorada no teorema de Bell (1964) e encontrou aplicação especial na teoria da computação quântica. Ela pode ser esboçada da seguinte maneira:

*Postulado 5: (Não-separabilidade)* Dois objetos quânticos interagentes podem formar um sistema quântico “emaranhado”, caracterizado por um estado *não fatorável*, ou seja, um estado que não pode ser escrito como o produto de um estado associado ao primeiro objeto e um estado associado ao segundo objeto.

As consequências desta propriedade de sistemas quânticos têm sido bastante exploradas nas últimas décadas (ver, por exemplo, d’Espagnat 1979). Para finalizar, é preciso um postulado que saliente as diferenças entre bósons e férmions, de maneira análoga ao 7º postulado da seção 2:

*Postulado 6:* Os objetos quânticos elementares se dividem em *bósons*, com spin inteiro, e *férmions*, com spin semi-inteiro. Os primeiros devem ser descritos por estados simétricos, e os últimos por estados anti-simétricos.

## Referências bibliográficas

- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. e F. Laloë (1977), *Quantum Mechanics*, New York: Wiley.
- d’Espagnat, B. (1976), *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, 2ª ed., Reading, MA: Benjamin.
- d’Espagnat, B. (1979), “The Quantum Theory and Reality”, *Scientific American* 241 (Nov.): 128-140.
- Dorling, J. (1977), “The Eliminability of Masses and Forces in Newtonian Particle Mechanics: Suppes Reconsidered”, *British Journal for the Philosophy of Science* 28: 55-57.
- Isham, C.J. (1995), *Lectures on Quantum Theory*, London: Imperial College Press.
- McKinsey, J.C.C., Sugar, A.C. e P. Suppes (1953), “Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics”, *Journal of Classical Mechanics and Analysis* 2: 253-272.
- Pereira, A.P., Pessoa Jr., O., Cavalcanti, C.J.H. e F. Ostermann (2012), “Uma Abordagem Conceitual e Fenomenológica dos Postulados da Física Quântica”, *Cadernos Brasileiros de Ensino de Física* 29, número especial 2: 831-863.
- Pessoa Jr., O. (2003), *Conceitos de Física Quântica*, vol. 1. São Paulo: Livraria da Física.
- Randall, C.H. e D.J. Foulis (1970), “An Approach to Empirical Logic”, *American Mathematical Monthly* 77: 363-374.
- Simon, H.A. (1970), “The Axiomatization of Physical Theories”, *Philosophy of Science* 37: 16-26.
- Suppe, F. (1989), *The Semantic Conception of Theories and Scientific Realism*, Urbana: University of Illinois Press.
- von Neumann, J. (1955), *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton: Princeton University Press (original em alemão: 1932).