

## Princípios de Mínima Ação

**Questão: Qual é o lugar das causas finais na física (e na ciência)?**

### 1. Paradigmas e Programas de Pesquisa

Os princípios da mecânica de Newton, e sua teoria gravitacional, foram aos poucos sendo aceitos pela grande maioria dos físicos e passou a constituir o que Thomas Kuhn chamou de *paradigma*. Um paradigma – ou “matriz disciplinar”, como Kuhn passaria a nomeá-lo – é constituído não só das leis gerais da teoria, mas também de estratégias heurísticas (ou seja, de técnicas de resolução de problemas), métodos de justificação, “exemplares” (ou seja, modelos ou exercícios prototípicos, ensinados na formação do cientista), valores cognitivos (ou seja, quais as características desejáveis de uma boa teoria científica), uma visão geral do mundo (incluindo teses metafísicas), o significado dos termos linguísticos, e mesmo conhecimento tácito (aquele que não conseguimos exprimir linguisticamente).

Dentro de um paradigma, desenvolve-se uma ciência “normal” de resolução de charadas, sem que haja, segundo Kuhn, uma busca por novos princípios. Ele estudou como um paradigma é substituído por outro – por exemplo, como a física de Newton foi substituída pelas teorias da relatividade –, ao que ele denominou *revolução científica*. Esta seria uma transição entre duas maneiras diferentes de ver o mundo; além disso, como os próprios critérios do que seria uma boa teoria científica mudariam de paradigma para paradigma, cientistas de matrizes disciplinares diferentes não teriam uma medida comum para avaliar qual das teorias é melhor. Isso resultaria em uma “incomensurabilidade” entre paradigmas diferentes (Kuhn, Feyerabend). O fato de que boa parte dos cientistas da velha geração não entendessem o novo paradigma seria resolvido com a morte deles (o chamado “princípio de Planck” da sociologia da ciência). No entanto, muitos filósofos consideram que há procedimentos práticos para contornar as dificuldades de tradução entre campos distintos, como o desenvolvimento de uma linguagem simplificada, compreensível para ambos os lados. A transição entre paradigmas, segundo Kuhn, seria precedida por uma “crise”, em que inúmeras “anomalias” (isto é, discrepâncias entre fatos observados e previsões teóricas) não seriam resolvidas pelo paradigma anterior.<sup>124</sup>

A “metateoria” de Kuhn (ou seja, sua teoria de como teorias científicas se transformam) não deu ênfase adequada ao fato de que, mesmo em ciências maduras, paradigmas diferentes podem coexistir e competir. Este aspecto foi levado em conta pelo filósofo húngaro Imre Lakatos<sup>125</sup>, em sua metodologia dos programas de pesquisa científica. Para ele, a unidade do desenvolvimento científico não seria uma teoria científica isolada, mas sim uma sequência de teorias, formando um *programa de pesquisa*. As teorias que se sucedem em um programa manteriam, sem modificação, um conjunto de teses centrais que Lakatos chamou de “núcleo duro”. Sempre que alguma nova previsão teórica é falseada pela experiência, modificações são introduzidas em teses periféricas, que constituem o “cinto de

---

<sup>124</sup> KUHN, T. (2001), op. cit (nota 3). FEYERABEND, P. (1977), *Contra o método*, Francisco Alves, São Paulo (orig. 1975). A proposta de uma linguagem simplificada é apresentada por GALISON, P. (1997), *Image and logic: a material culture of microphysics*, U. Chicago Press, cap. 9.

<sup>125</sup> LAKATOS, I. (1979), “O falseamento e a metodologia dos programas de pesquisa científica”, in LAKATOS, I. & MUSGRAVE, A. (orgs.), *A crítica e o desenvolvimento do conhecimento*, Cultrix, São Paulo, pp. 109-243 (orig. 1970).

proteção” do núcleo. A maneira de empreender esses ajustes ao cinto de proteção, e de fazer novas previsões, é ditada pela “heurística” do programa, que consiste do conjunto de métodos, estratégias de trabalho e exemplos prototípicos, visando a resolução de problemas. Um programa de pesquisa pode ser *progressivo*, caso em que é racional para o cientista continuar trabalhando nele. Para ser progressivo, segundo Lakatos, o programa tem que fazer novas previsões, mas essas previsões não precisam ser sempre corroboradas (confirmadas) pela experiência – basta que o sejam apenas de vez em quando, de maneira “intermitente”. No calor da hora, nunca podemos ter certeza que um programa de pesquisa foi refutado; só podemos dizer que houve um “experimento crucial” muito tempo depois: a racionalidade científica não é instantânea.

Larry Laudan levou adiante a noção de programa de pesquisa, mas salientou que teses do núcleo duro podem ser abandonadas sem que se abandone a tradição do programa. Preferiu o termo “tradição de pesquisa”, que envolve uma seqüência de teorias que se assemelham e se sucedem, de tal forma que os cientistas participantes tenham um compromisso com pelo menos uma parte das teses centrais de um subconjunto das teorias anteriores de sua tradição. Um exemplo seriam as tradições de pesquisa sobre a natureza da luz: os programas corpuscular e o ondulatório competiram desde a época de Huygens e Newton até meados do séc. XIX, quando o ondulatório se viu vencedor, mas depois, com a física quântica, houve uma espécie de síntese entre os dois.

A relação multifacetada entre teoria, métodos e valores foi analisada por Laudan em seu “modelo reticulado” de racionalidade científica. Segundo esta abordagem, cada um desses três aspectos da pesquisa científica pode afetar a evolução histórica do outro, dentro de uma tradição de pesquisa.<sup>126</sup>

## 2. Programas de Pesquisa Rivals na Mecânica Clássica

Em 1687, Isaac Newton formulou a abordagem à mecânica baseado em suas três leis (inércia, força e ação & reação) e, supondo sua lei da gravitação universal, a aplicou com muito sucesso para a descrição dos movimentos dos planetas do sistema solar.

A partir dessa mesma época, e culminando com seu *Specimen dynamicum* (1695), Gottfried Leibniz estava definido a “força viva” (energia cinética,  $mv^2$ ) e a “força morta” (energia potencial, na queda livre proporcional à altura da queda). Em processos mecânicos em que se despreza a resistência do meio e não há obstáculos inelásticos, como um pêndulo, haveria uma conservação da soma das forças viva e morta (esta noção já fora enunciada por Huygens, em 1673). Num choque inelástico, vislumbrou que a força viva se transforma em uma força morta ligada à deformação dos corpos.

Leibniz argumentou que o princípio de conservação de quantidade de movimento, de Descartes, era errôneo. Depois da morte de Leibniz, seguiu-se um longo debate a respeito da sua teoria das forças vivas. Em 1728, Jean-Jacques de Mairan corrigiu o enunciado do princípio cartesiano, levando em conta as direções das velocidades (ou seja, o caráter vetorial da velocidade). A aceitação geral do princípio de força viva só viria a partir de 1743, com o *Traité de dynamique* do francês Jean d’Alembert, mas já antes disso os suíços Johann

---

<sup>126</sup> LAUDAN, L. (1977), *Progress and its problems*, Berkeley U. Press; em português: *Progresso e seus problemas*, trad. R. Leal Ferreira, UNESP, São Paulo, 2011. O modelo reticulado está exposto em: LAUDAN, L. (1984), *Science and values*, U. California Press, Berkeley.

Bernoulli e seu filho Daniel estavam resolvendo diversos problemas de mecânica utilizando os dois princípios de conservação.<sup>127</sup>

Quanto à abordagem newtoniana, sua sistematização foi empreendida pelo grande matemático suíço Leonhard Euler, a partir de 1726. Em 1736, com sua *Mechanica*, introduz massas pontuais, acelerações contínuas e considerações vetoriais, demonstrando de maneira rigorosa vários resultados e resolvendo diversos problemas.

Configurava-se, a esta altura, o ramo da matemática aplicada conhecido como *mecânica racional*, vista como uma geometria de corpos em movimento. Posteriormente, discutir-se-ia se as leis da mecânica seriam necessárias ou “contingentes” (ou seja, não-necessárias). Euler e d’Alembert defenderiam sua necessidade, ao passo que Lazare Carnot (1783) defenderia seu caráter empírico (portanto contingente).

Paralelamente a essas linhas de pesquisa, há o desenvolvimento da dinâmica dos corpos rígidos. Em seu *Horologium oscillatorium* (1673), Christiaan Huygens havia mostrado como calcular o “centro de oscilação” de um pêndulo físico, ou seja, o pêndulo simples com o mesmo período de oscilação. Houve muita discussão sobre esse trabalho, o que levou Jakob Bernoulli, irmão mais velho de Johann, a publicar em 1703 um trabalho em que refaz a demonstração de Huygens a partir das propriedades da alavanca. Isso seria uma antecipação do princípio de trabalho virtual, de d’Alembert.

Jakob Bernoulli também inaugurou a teoria dos corpos elásticos (1705). A teoria das vibrações se inicia com Taylor (1713) e é desenvolvida por Euler, Johann e Daniel Bernoulli. Este último desenvolve também a hidrodinâmica (1733-38).

O *Traité de dynamique* (1743) de d’Alembert trata do problema dos corpos rígidos sem utilizar o conceito de força newtoniano, mas sim o “princípio de trabalho virtual”, que é uma lei de equilíbrio. Tal princípio está intimamente relacionado com o de conservação de força viva, mas d’Alembert toma o princípio de trabalho virtual como fundamental (não o de força viva), juntamente com o princípio de inércia e o princípio de composição de movimentos (que permite decompor um movimento de maneira conveniente para a aplicação do trabalho virtual).

Para entender o princípio de trabalho virtual, pode-se consultar a exposição didática de Feynman<sup>128</sup>. Considere a situação de equilíbrio de dois corpos ligados, como o da Fig. XV.1a. Numa situação de reversibilidade (sem atrito), o equilíbrio pode ser estabelecido como na Fig. XV.1b. Nesta transição, o corpo B subiu uma altura de  $\Delta h_B = 3$  m, ao passo que a descida de A é expressa pela variação  $\Delta h_A = -5$  m. Assim, a massa desconhecida  $m_A$  pode ser calculada pela conservação de energia potencial gravitacional (a energia cinética não se altera), o que corresponde a uma igualdade nos trabalhos realizados (a menos do sinal):  $m_A \cdot \Delta h_A + m_B \cdot \Delta h_B = 0$ . Numa situação mais complicada, como a da Fig. XV.2, o valor do peso  $W$  que equilibra o conjunto pode ser calculado considerando-se um pequeno deslocamento vertical neste peso, o que alterará as alturas das outras massas para valores facilmente calculáveis. Aplica-se então a conservação dos trabalhos e encontra-se o valor de  $W$ . Como esse trabalho não ocorre de fato, mas é apenas um artifício para o cálculo, recebe o nome de “trabalho virtual”.

<sup>127</sup> Seguimos TRUESDELL (1968), op. cit. (nota 101), e DUGAS, R. (1988), *A History of mechanics*, Dover, Nova Iorque (orig. em francês, 1955), pp. 219-53.

<sup>128</sup> FEYNMAN, R.P.; LEIGHTON, R.B. & SANDS, M. (1963), *The Feynman lectures on physics*, vol. I, Addison-Wesley, Reading, pp. 4-1 a 4-5. As Figs. XV.1 e 2 são retiradas desta referência. Tradução para o português: *Lições de física de Feynman - Edição definitiva*, trad. A.V. Roque da Silva & K.R. Coutinho, Artmed Bookman, Porto Alegre, 2008.

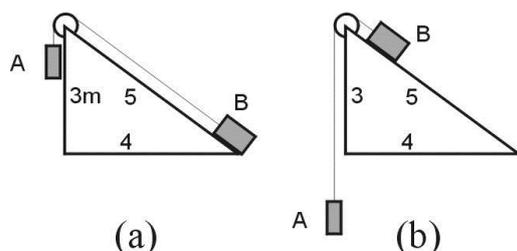


Figura XV.1: Pesos em equilíbrio, sem atrito, em um plano inclinado.

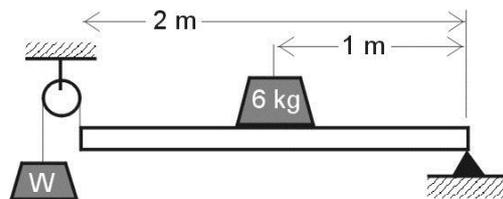


Figura XV.2: Situação de equilíbrio para aplicação do princípio de trabalho virtual.

D'Alembert fez questão de não exprimir as “causas motivas” dos movimentos, ou seja, as forças, que considerava “obscuras e metafísicas” (ver DUGAS, p. 247). A partir de seu princípio, aplicado a sistemas com restrições entre as partes, derivou a conservação de força viva. Esta estratégia foi posteriormente generalizada com sucesso pelo italiano de descendência francesa Louis de Lagrange, em sua *Mécanique analytique* (1788), onde também não se fala em forças (no sentido de Newton e especialmente Euler).

Euler, por seu turno, foi bem sucedido na extensão dos princípios newtonianos para diversos sistemas, inclusive corpos rígidos, que envolve um princípio adicional, a lei do torque, derivada em 1776. Argumenta-se que este princípio é independente das três leis de Newton, para casos gerais.

Delineam-se, assim, diferentes programas de pesquisa na mecânica no séc. XVIII, e uma tendência de unificação entre eles. O programa cartesiano acabou sendo mesclado com o leibniziano, e ambos foram incorporados ao programa d'alembertiano, que resultou na mecânica lagrangiana. Paralelamente a isso, o programa de Newton e Euler acabou se firmando como mais geral, aplicável em maior número de casos, fundamentado na noção de força. A controvérsia a respeito do estatuto do conceito de força adentraria o séc. XIX, como veremos no próximo capítulo, mas as abordagens rivais de Euler e d'Alembert acabaram sendo vistas como duas abordagens diferentes para uma mesma ciência da mecânica.

### 3. Princípio de Mínima Ação

No esboço histórico da mecânica apresentada acima, deixamos de lado uma abordagem adicional, inaugurada por Pierre de Maupertuis em 1744, o princípio de mínima ação, e que seria posteriormente assimilado na mecânica analítica de Lagrange. Este princípio é de interesse pois ele pretende implementar a tese filosófica de que a natureza age de maneira a minimizar uma certa grandeza, como se ela tivesse um objetivo ou uma meta – um *telos*, em grego. Nas palavras de Maupertuis: “a Natureza, na produção de seus efeitos, sempre age das maneiras mais simples”.<sup>129</sup> Tal tese levou a uma grande discussão porque ela sugere que a física pode ser construída de maneira “teleológica”, ou seja, envolvendo causas finais (que estariam no futuro ou estariam indicando um estado no futuro), e não apenas causas eficientes (que vêm sempre antes dos efeitos).

A física de Aristóteles é um exemplo de teleologia. Para ele, os corpos graves têm um “lugar natural”, que é o centro do Universo, e por isso eles caem quando soltos (ver seção X.1). É como se eles tivessem uma meta (*telos*), um propósito. As explicações do naturalismo animista (seção X.3) também são teleológicas.

<sup>129</sup> DUGAS (1988), op. cit. (nota 127), pp. 254-75. Ver também YOURGRAU, W. & MANDELSTAM, S. (1968), *Variational principles in dynamics and quantum theory*, Dover, Nova Iorque.

A idéia de que a natureza segue caminhos simples tem vários precursores, mas na física o primeiro exemplo mais detalhado é dado por Héron de Alexandria, em 125 AEC. Ele argumentou que na reflexão da luz por um espelho, o caminho percorrido é o de *menor comprimento*. Considere a Fig. XV.3, no qual a luz sai de uma vela em *A*, reflete no espelho em *C*, e ruma para o olho em *B*. Este é o caminho mais curto saindo de *A*, refletindo no espelho e incidindo em *B*. Para mostrar isso, considere um outro ponto de reflexão, *D*. Ligando o ponto *E*, que é a imagem de *A*, aos pontos *C* e *D*, temos que os seguintes segmentos têm o mesmo comprimento:  $AC = EC$ , e  $AD = ED$ . Ora, mas está claro que a linha reta  $ECB$  é mais curta do que o caminho  $EDB$  (desigualdade do triângulo). Portanto, o caminho  $ACB$  é mais curto do que qualquer outro caminho  $ADB$ .

Em 1662, Pierre de Fermat adaptou a estratégia de Héron para o caso da refração da luz, só que agora considerando que a luz toma o caminho que leva *menos tempo*. Ele queria mostrar que a fórmula da refração (lei de Snell) derivada por Descartes era falsa, e para isso supôs que a luz se propaga com uma velocidade menor em meios mais densos (o que é verdade, mas ia contra ao que achavam Descartes e Newton). Ao fazer suas contas, descobriu que o caminho de menor tempo era justamente aquele que satisfazia a lei de Snell-Descartes! Obteve assim uma “lei de mínimo” para a propagação da luz, mas seu resultado só seria aceito após a metade do séc. XIX.

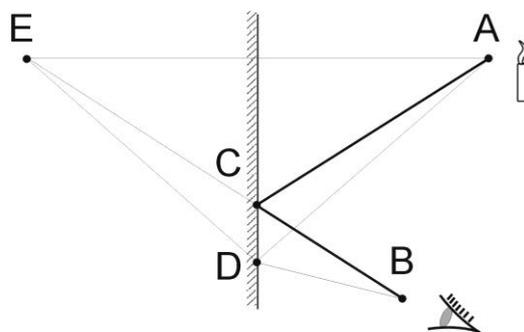


Figura XV.3. Diagrama ilustrando a demonstração de Héron de que a luz, na reflexão, percorre o caminho de menor distância.

Em 1744, Maupertuis buscou corrigir o trabalho de Fermat, e chegou à conclusão que o que seria minimizado na propagação da luz não seria o tempo, mas a *ação*  $S$ , que é o produto da distância  $r$  percorrida e do momento linear  $mv$ :  $S = \int m v(r) dr$ . Já em 1740 Maupertuis havia usado um princípio de máximo ou de mínimo para uma situação de equilíbrio

Em 1747, mostrou que é possível aplicar este resultado para o choque de dois corpos, quer no caso de colisões elásticas quanto inelásticas, o que tornaria o princípio mais geral do que a conservação de força viva (que só valeria no caso de choques elásticos). A partir daí, generalizou o princípio de mínima ação para toda a mecânica: “Quando alguma mudança ocorre na natureza, a quantidade de ação necessária para essa mudança é a menor possível” (DUGAS, p. 265). Maupertuis via em seu princípio uma expressão da perfeição de Deus, que agiria por meio de leis simples e com um gasto mínimo de ação.

Em 1751, o holandês Samuel Koenig apresentou uma carta em que Leibniz teria anunciado em 1707 que “nas variações dos movimentos, [a ação] usualmente se torna mínima ou máxima”. Ele usou o termo “ação”, definindo-o também como o produto do tempo e da força viva (energia cinética). Iniciou-se então uma grande polêmica sobre a prioridade e os méritos de Maupertuis, mas a tal carta de Leibniz nunca foi encontrada (DUGAS, pp. 270-3).

Independentemente de Maupertuis, seu amigo Euler publicou em 1744 uma versão mais particular, porém matematicamente mais precisa, do princípio de mínima ação. Segundo seu teorema, quando uma partícula viaja entre dois pontos fixos, ela toma o caminho para o qual  $\int v(r) dr$  é mínimo. Seu resultado é baseado no cálculo de variações, e na verdade o que

ele demonstra é que a integral da ação é um mínimo, um máximo ou mesmo um ponto intermediário de derivada nula (ponto de sela).<sup>130</sup> A rigor, então, o princípio de Euler é um enunciado relativo às trajetórias “virtuais” (que não satisfazem as leis de Newton) que são vizinhas à trajetória real da partícula. “A diferença entre as integrais  $\int \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$  tomadas ao longo da trajetória real e dos caminhos virtuais vizinhos, entre os dois pontos, é uma grandeza infinitesimal de segunda ordem; os caminhos virtuais considerados são aqueles com velocidades que resultem na mesma energia que aquela suposta para a partícula” (YOURGRAU & MANDELSTAM, p. 25).

O princípio variacional foi derivado de maneira mais geral por Lagrange, em 1760, para  $n$  partículas, mostrando que as leis de Newton são equivalentes ao princípio de mínima ação em conjunção com a lei de conservação de energia. A conservação de energia entra ao se considerarem caminhos virtuais de mesma energia.

Com o princípio de trabalhos virtuais, Lagrange abriu caminho para sua *Mécanique Analytique* (1788), que forneceu um método prático para calcular os movimentos de corpos rígidos sujeitos a vínculos, problema cuja resolução pelos métodos de Newton e Euler em geral se torna onerosa. Ele introduziu coordenadas generalizadas e obteve equações cuja forma é invariante ante troca de coordenadas. Definindo a “lagrangiana” como a diferença entre a energia cinética  $T$  e potencial  $V$ , escrita em função das coordenadas generalizadas  $q_i$  e  $\dot{q} := dq/dt$ , sua equação é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 .$$

As formulações do princípio variacional de Euler e Lagrange estão restringidas a caminhos virtuais de mesma energia. Essa restrição foi removida em 1834 pelo irlandês William Hamilton, que considerou, porém, caminhos virtuais que terminam no mesmo ponto e no mesmo tempo. Chegou assim ao chamado “princípio de Hamilton”:  $\delta \int L \, dt = 0$ . “Um sistema muda de uma configuração para outra de tal maneira que a variação da integral  $\int L \, dt$  entre o caminho real e um vizinho, terminando no mesmo ponto do espaço e do tempo, é nula” (YOURGRAU & MANDELSTAM, p. 47). A partir deste princípio variacional, obtêm-se as equações de Lagrange.

Uma formulação em que o tempo é eliminando, resultando em uma “geometrização” do princípio de extremo, foi feita pelo alemão Carl Jacobi em 1843. Anunciou então que “em sua forma verdadeira [é difícil] atribuir uma causa metafísica a este princípio” (DUGAS, pp. 407-8).

Princípios variacionais foram usados na velha teoria quântica e na derivação da equação de Schrödinger, da mecânica quântica, e nos trabalhos de Schwinger e Feynman<sup>131</sup> na teoria quântica de campos relativísticos.

<sup>130</sup> Mesmo o oscilador harmônico tem como solução um “ponto de sela” da ação, e não um mínimo. Ver GRAY, C.G. & TAYLOR, E.F. (2007), “When the action is not least”, *American Journal of Physics* 75, 434-58. Devo este comentário a Wilson Hugo Freire, físico que publicou sobre o assunto.

<sup>131</sup> Uma discussão interessante sobre o princípio de Fermat é feito por FEYNMAN *et al.* (1962), op. cit. (nota 128), pp. 26-7 a 26-8, em que ele apresenta de maneira didática sua visão conhecida como “soma sobre histórias”. Veremos um pouco desta abordagem na seção XVIII.5.

#### 4. Causas Finais na Física

O princípio de mínima ação foi visto, por Maupertuis e Euler, como um princípio metafísico exprimindo a perfeição de Deus ou uma tendência da natureza de escolher caminhos mais simples. Essa noção teleológica passou a ser atacada posteriormente, por exemplo por d'Alembert (1758), que criticou “o princípio das causas finais” (DUGAS, p. 269), e foi abandonada pela maioria dos físicos, que costuma não interpretar os princípios de extremo de maneira teleológica.

Mesmo assim, a linguagem teleológica está presente em algumas explicações físicas corriqueiras. Um sistema tende para o estado que *minimiza* sua energia, ou para um que *maximiza* sua entropia. Explicações mecânicas buscam dar conta desses enunciados teleológicos por meio apenas de causas eficientes, como será exemplificado mais à frente com relação à entropia.

A questão da teleologia na biologia é bem mais controversa. Pode-se interpretar o mecanismo da seleção natural como uma explicação causal-eficiente para evolução dos seres vivos, mas autores como Ernst Mayr defendem que uma “teleonomia” estaria associada ao código genético.

Na cosmologia, o “princípio antrópico” (seção VII.5) pode ser interpretado como uma tese finalista, ao afirmar que o nosso Universo contém as condições ideais para o surgimento da vida. No entanto, em sua versão mais fraca, tal princípio é perfeitamente consistente com a causação eficiente.