

Simetrias

Questão: O que é uma simetria?

1. Paradoxo da Inversão no Espelho

(1) Quando nos olhamos no espelho, vemos de maneira invertida os nossos lados direito e esquerdo. Certo? (*Tese da inversão esquerda-direita*)

(2) Neste caso, não vemos uma inversão de cima para baixo. Isso é claro.

(3) Porém, dado que o espelho é simétrico quanto às direções esquerda-direita e cima-embaixo (*tese da simetria do espelho*), por que ele também não inverteria em cima com embaixo?

Caso 1. Folha de papel no espelho. Apoie uma folha de papel em um espelho, escreva uma palavra na folha, como USP, e depois olhe para a folha refletida no espelho. Você vê a escrita invertida da esquerda para a direita, $\Psi\mathcal{Z}U$, em acordo com a tese (1), sem inversão cima-embaixo. Mas isso ocorre porque você girou o papel em torno do seu eixo vertical z ! Se tivesse girado em torno do seu eixo horizontal x , a palavra estaria de cabeça para baixo, $\Omega\mathcal{Z}B$, e não haveria inversão esquerda-direita. Assim, a tese da simetria se mantém.

Se houvesse dois espelhos, um na frente do outro, de forma a gerar uma sequência aparentemente infinita de imagens de papéis, o que aconteceria? Suponha que a folha de papel seja transparente e tenha sido girada em torno do eixo z ; assim, na primeira imagem especular a palavra apareceria como $\Psi\mathcal{Z}U$. E nas outras imagens da palavra? Elas manteriam a orientação, $\Psi\mathcal{Z}U \Psi\mathcal{Z}U \Psi\mathcal{Z}U \Psi\mathcal{Z}U \dots$, ou haveria inversões sucessivas: $\Psi\mathcal{Z}U \text{ USP } \Psi\mathcal{Z}U \text{ USP } \dots$?

Faça ou imagine o experimento do papel escrevendo em uma folha de plástico transparente. Neste caso, olhe para a palavra USP escrita no plástico à sua frente. Supondo que atrás deste plástico haja um espelho (também à tua frente), o que aparece nesse espelho? USP, ou $\Psi\mathcal{Z}U$, ou $\Omega\mathcal{Z}B$, ou mesmo $\mathcal{d}S\Omega$? A tese da simetria (3) se mantém?

Sim, a tese da simetria se mantém, pois não há inversão esquerda-direita, nem cima-embaixo.

Caso 2. Olhando para nossa imagem com relógio. Ao nos olharmos no espelho, usando um relógio no pulso esquerdo, temos a impressão de que nos vemos com o relógio na mão direita (tese 1).

Mas prestemos atenção nos diferentes sentidos das direções, conforme a Fig. XVII.1. A pessoa que se mira no espelho, Narciso, tem um relógio no seu pulso esquerdo, que na figura corresponde a oeste. Em que direção e sentido está o relógio da imagem? Ora, ele também está no sentido oeste, ou seja, também está do lado esquerdo de Narciso. Assim, na verdade, não ocorre inversão esquerda-direita na imagem, e nem cima-embaixo! A tese da simetria (3) é novamente corroborada!

A Óptica ensina que a imagem vista no espelho corresponde a uma reflexão do corpo tridimensional *no plano do espelho* (xz). As costas reais de Narciso apontam para trás ($+y$), ao passo que as costas da imagem apontam para frente ($-y$). Há uma inversão apenas na direção frente-trás. Mas por que Narciso tem a *impressão* de ter havido inversão esquerda-direita?

Caso 3. O coelho de Narciso. Como todo coelho, Peter, o coelho de Narciso, tem olhos nas laterais da cabeça. Na Fig. XVII.2, Peter caminha para leste ($-x$), olhando para sua imagem no espelho com seu olho esquerdo, sem precisar virar a cabeça para o espelho. Neste caso, há inversão esquerda-direita do rosto de Peter, pois há inversão na imagem ao longo da direção y , correspondendo à reflexão no plano xz do espelho.

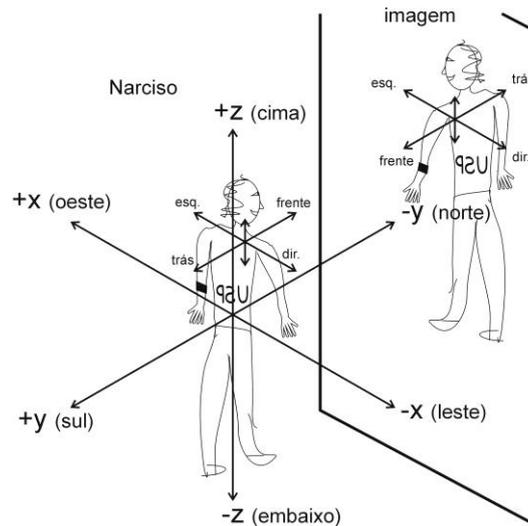


Figura XVII.1. Reflexão no espelho. Narciso tem a impressão de que o relógio está no pulso esquerdo de sua imagem, mas na verdade o relógio da imagem aponta para oeste, ou seja, para a esquerda de Narciso. Na verdade, em relação a Narciso, a imagem sofre uma inversão na direção norte-sul. Não há inversão esquerda-direita, mas porque Narciso tem a impressão de que há?

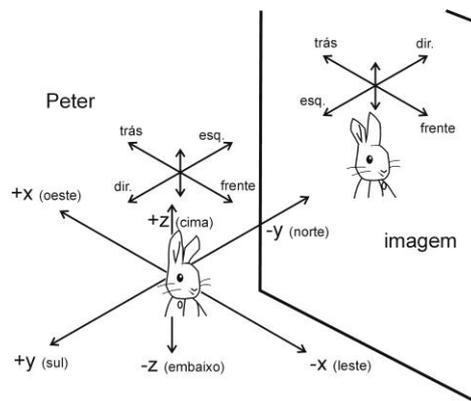


Figura XVII.2. Inversão esquerda-direita. Só ocorre inversão do lado esquerdo e direito de um corpo quando este está de lado para o espelho, como Peter, o coelho, que olha para leste.

Caso 4. Projeção do corpo. Se na reflexão especular não há inversão na direção esquerda-direita, então por que dizemos que “quando nos olhamos no espelho, vemos de maneira invertida os nossos lados direito e esquerdo” (tese 1)? Porque ao ver nossa imagem, *projetamos* a figura de uma pessoa real. Ao olhar para nossa imagem no espelho, temos a impressão de que ali há uma pessoa real. Se de fato houvesse uma pessoa real, ela estaria com o relógio no braço direito dela (e não no esquerdo, como em Narciso).

Mas por que esta ilusão não ocorre na direção cima-embaixo? Talvez porque os seres humanos andam no chão, e nunca vemos pessoas andando de cabeça para baixo? Mas considere o caso em que estamos deitados no chão, olhando para um espelho na parede (isso vale para qualquer rotação em torno do eixo y). A ilusão da inversão do relógio continua, mas não ocorre inversão entre os sentidos da cabeça e dos pés...

Caso 5. Simetria bilateral. A razão pela qual a ilusão ocorre com o relógio é que temos simetria bilateral! Ao olharmos para o espelho, projetamos uma pessoa real porque ela é praticamente indistinguível de nossa imagem. Ao olharmos para o espelho e nos vemos, não estamos nos vendo como fazem as outras pessoas (e como aparecemos em fotos). A pessoa que projetamos tem os lados esquerdo e direito invertidos.¹⁴²

Caso 6. Simetria retangular. Não temos a ilusão de inversão com a cabeça e os pés porque não temos simetria em relação à nossa cintura: nossa cabeça é muito diferente de nossas pernas. Porém, podemos imaginar seres com simetria não só esquerda-direita, mas também cima-embaixo (mas não de rotação de 90°), ou seja, simetria retangular (chamada D2). Estes poderiam ter a ilusão de inversão nas duas direções! Ver Fig. XVII.3.

Em suma, a explicação do paradoxo da inversão do espelho envolve dois pontos: (i) o espelho é simétrico no seu plano xz , então a imagem que vemos *não inverte* nem esquerdo-direito, nem cima-embaixo, mas apenas frente-trás; (ii) a ilusão surge porque *projetamos* um corpo real aonde vemos a imagem especular; como temos apenas *simetria bilateral*, o corpo projetado se confunde com a imagem, gerando uma ilusão de inversão, apenas no direção bilateral.

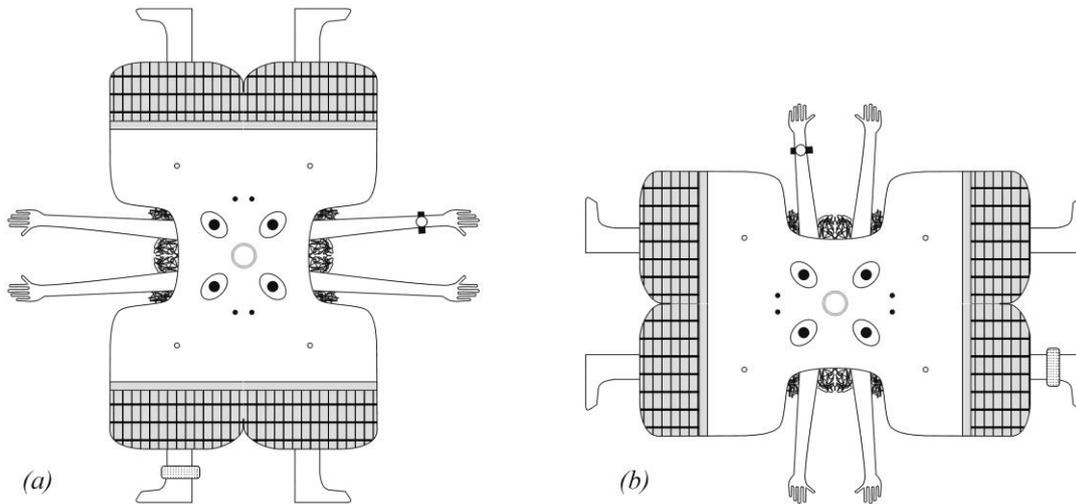


Figura XVII.3. (a) Uma alienígena de simetria retangular, $\overset{A}{ABON} \underset{A}{NOBA}$, viaja em sua nave espacial (com gravidade zero) rumo à Terra, com um relógio em um de seus braços esquerdos, e uma fita em uma de suas canelas pernaís. Ela se olha no espelho e, ao projetar alguém de sua espécie em sua imagem, tem a impressão de que está com o relógio em um de seus braços direitos (invertendo esquerda-direita), e a fita em uma de suas canelas cabeçaís (invertendo cima-embaixo). (b) Esta última inversão fica mais fácil de aceitar se pensarmos na situação em que ela fica de lado, pois aí a fita sofre inversão esquerda-direita. Não se sabe se esta ilusão dupla permanecerá quando nossa heroína tiver contato com a gravidade terrestre.

2. Simetrias na Física

Seção ainda a ser preparada.

¹⁴² A análise apresentada concorda com aquela oferecida por GARDNER, M. ([1964] 2005), *The new ambidextrous universe*, Dover, Mineola (NY), pp. 19-22. Este autor menciona em seu texto algumas visões discordantes.