

# INTERPRETAÇÕES DA TEORIA QUÂNTICA E AS CONCEPÇÕES DOS ALUNOS DO CURSO DE FÍSICA

**Roberto Luiz Montenegro**

Mestrado Interunidades de Ensino de Ciências (Modalidade Física)  
Instituto de Física – Universidade de São Paulo  
C.P. 66318 São Paulo, SP, 05389-970  
robot@if.usp.br

**Oswaldo Pessoa Jr.**

Mestrado em História, Filosofia e Ensino das Ciências  
Universidade Federal da Bahia – Universidade Estadual de Feira de Santana  
IF-UFBA, Salvador, BA, 40210-340  
opessoa@ufba.br (e-mail atual: [opessoa@usp.br](mailto:opessoa@usp.br))

Revista eletrônica *Investigações sobre Ensino de Ciências* 7(2), 2002, UFRGS.  
On-line: [http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n2/v7\\_n2\\_a1.html](http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n2/v7_n2_a1.html)

## Resumo

Este artigo investiga as interpretações “privadas” que os alunos de Mecânica Quântica desenvolvem a respeito desta teoria. Através de questionários, analisamos suas concepções sobre o experimento da dupla fenda, princípio de incerteza, estado quântico, retrodição e postulado da projeção. Correlacionando as respostas de cada aluno, constatamos que diferentes interpretações privadas são freqüentemente usadas para analisar diferentes problemas. Outras conclusões sobre os processos cognitivos dos alunos são também obtidas.

**Palavras-chave:** ensino de Mecânica Quântica; pesquisa em ensino de Física; interpretações da Mecânica Quântica

## Abstract

This paper investigates the “private” interpretations that students of quantum mechanics develop concerning this theory. By means of questionnaires, we analyze their conceptions with respect to the double slit experiment, uncertainty principle, quantum state, retrodiction, and projection postulate. Correlating the students’ answers, we observe that different private interpretations are frequently employed for analyzing different problems. Other conclusions about the cognitive processes of the students are also obtained.

**Key words:** teaching of quantum mechanics; research in physics education; interpretations of quantum mechanics

## 1. Introdução

Este trabalho é um estudo das “interpretações” que os alunos adotam quando estudam Mecânica Quântica. Em um curso de graduação típico, espera-se que o aluno aprenda a aplicar a teoria quântica na resolução de problemas. Se o aluno aprender a aplicar as regras matemáticas adequadamente, ele é aprovado no curso. No entanto, para conseguir fazer as contas, o aluno usualmente invoca uma *representação* do mundo físico em sua mente, uma representação que em geral vai além das observações no laboratório. Ele imagina partículas como bolinhas, imagina uma

onda se propagando, imagina um microscópio de raios gama, etc. O aluno busca *interpretar* os diferentes símbolos e procedimentos matemáticos, ou seja, imaginar a que entidades reais eles correspondem, se é que se possa dizer que eles correspondam a alguma coisa.

Existem diferentes interpretações “sistematizadas” da teoria quântica, que aparecem em publicações na literatura e nos livros-texto (ver Jammer, 1974; Herbert, 1989). Mas também existem *interpretações “privadas”*, usadas pelo cientista enquanto ele trabalha, e construídas pelos alunos durante a aprendizagem da teoria. São essas representações e interpretações privadas de alunos que investigamos neste trabalho.

Elaboramos vários questionários escritos concernentes às interpretações privadas dos alunos, e realizamos também algumas entrevistas gravadas. Para diversos problemas de física quântica, pudemos constatar o uso de diferentes interpretações por parte de diferentes alunos. Percebemos, porém, que muitos alunos fazem uso de uma interpretação para um certo problema, e de uma interpretação diferente para outro tipo de problema. Muitas vezes são representações imagéticas que guiam os alunos, outras vezes é apenas a linguagem do formalismo matemático. Constatamos, enfim, que nos cursos regulares de Mecânica Quântica alguns conceitos básicos de física quântica, como os envolvidos no experimento da fenda dupla para um único elétron, não são suficientemente salientados.

No presente artigo, faremos apenas um resumo do trabalho realizado, para facilitar a leitura. Maiores detalhes da pesquisa podem ser obtidos de Montenegro (2000) [\(1\)](#). Esperamos que este estudo possa contribuir para a discussão sobre a reformulação do ensino de Física Quântica introdutória (ver revisão e bibliografia em Greca & Moreira, 2000).

## 2. Interpretações Sistematizadas da Teoria Quântica

É uma característica notável da Teoria Quântica que ela pode ser interpretada de diferentes maneiras, sendo que cada uma dessas interpretações é internamente consistente e, de modo geral, consistente com experimentos quânticos. Usamos a noção de *interpretação* como significando um conjunto de teses que se agrega ao formalismo mínimo de uma teoria científica, e que em geral não afeta as previsões observacionais da teoria. Se houver previsões novas, deveríamos falar de uma “teoria diferente”, mas se o desacordo com a Teoria Quântica for tão pequeno que não se possa fazer um experimento crucial para escolher entre elas, é costume considerar que a teoria diferente também é uma interpretação. As teses agregadas pela interpretação fazem afirmações sobre a realidade existente por trás dos fenômenos observados, ou ditam normas sobre a inadequação de se fazerem tais afirmações.

Existem dezenas de interpretações diferentes da Teoria Quântica, que podem ser agrupadas em quatro grandes grupos, conforme sua ontologia e atitude epistemológica (Pessoa, 1997, 1998). Com relação à *ontologia*, uma interpretação pode conceber um objeto quântico de maneira corpuscular, ondulatória ou dualista. Quanto às *atitudes epistemológicas*, as duas básicas são realismo e positivismo. Com estas categorias, encontramos quatro grandes grupos interpretativos. Dentro de cada uma delas, mencionaremos uma versão “ingênua”, que pode ser apresentada com proveito em sala de aula.

(1) *Interpretação Ondulatória (realista)*. Este ponto de vista considera que a função de onda quântica corresponde a uma realidade, uma realidade ondulatória ou talvez uma “potencialidade”. A visão ondulatória era defendida explicitamente por Erwin Schrödinger, mas ele

encontrou extrema dificuldade em dar conta dos fenômenos sem a noção de “colapso”. Na versão ingênua da interpretação ondulatória, a realidade que corresponde à função de onda sofreria colapsos toda vez que ela interage com um aparelho de medição. Um problema conceitual é que tais colapsos são “não-locais”, ou seja, envolvem efeitos que se propagam de maneira instantânea (ver Einstein em Solvay, 2001, p. 144). Esta visão é próxima a de John von Neumann, só que este não associava a função de onda a uma realidade (sua postura era positivista: a função de onda representaria apenas nosso conhecimento), de forma que a não-localidade não era problemática. A interpretação dos estados relativos de Everett (ver Jammer, 1974, p. 507-16), a da decoerência de Zeh (1993) e a das localizações espontâneas (Ghirardi et al., 1986) são outros exemplos de interpretações ondulatórias realistas.

(2) *Interpretação Corpuscular (realista)*. Este é o ponto de vista segundo o qual as entidades microscópicas (ou pelo menos as possuidoras de massa de repouso) são partículas, sem uma onda associada. Esta posição foi defendida explicitamente por Alfred Landé, dentro da interpretação dos ensembles (coletivos) estatísticos (ver Jammer, 1974, cap. 10). A grande dificuldade da abordagem corpuscular é explicar os padrões de interferência obtidos em experimentos com elétrons. Apesar deste problema não ter sido satisfatoriamente superado, é muito comum encontrarmos interpretações corpusculares na literatura e também, de forma mais ingênua, entre alunos. A interpretação implícita ao se usar a Lógica Quântica é um exemplo de interpretação corpuscular.

(3) *Interpretação Dualista Realista*. Esta interpretação foi formulada originalmente por Louis de Broglie, em sua teoria da “onda piloto”, e ampliada por David Bohm (1952) para incluir também o aparelho de medição (ver Jammer, 1974, pp. 278-96). O objeto quântico se divide em duas partes: uma partícula com trajetória bem definida (mas em geral desconhecida), e uma onda associada. A probabilidade da partícula se propagar em uma certa direção depende da amplitude da onda associada, de forma que em regiões onde as ondas se cancelam, não há partícula. No nível ingênuo de um curso introdutório, esta abordagem está livre do problema da não-localidade, tendo como única dificuldade conceitual a existência de “ondas vazias”, que não carregam energia. O problema da não-localidade só surge quando se consideram duas partículas correlacionadas.

(4) *Interpretação Dualista Positivista*. Esta expressão designa especialmente a interpretação da complementaridade de Niels Bohr (1928), que reconhece uma limitação em nossa capacidade de representar a realidade microscópica. Conforme o experimento, podemos usar ou uma descrição corpuscular, ou uma ondulatória, mas nunca ambas ao mesmo tempo. Isto não significa, porém, que o objeto quântico *seja* um corpúsculo ou *seja* uma onda. Segundo qualquer abordagem positivista (no contexto da física), só podemos afirmar a existência das entidades observadas. Afirmar, por exemplo, que “um elétron não-observado pode sofrer um colapso” carece de sentido. Um fenômeno ondulatório se caracteriza pela medição de um padrão de interferência, e um corpuscular pela possibilidade de inferir uma trajetória bem definida. O aspecto pontual de toda detecção (considerada pela interpretação 2 como a maior evidência da natureza corpuscular dos objetos quânticos), que ocorre mesmo em fenômenos ondulatórios, é considerado o princípio fundamental da teoria quântica, e chamado por Bohr de “postulado quântico”. Há diversas variações desta abordagem, constituindo as chamadas interpretações “ortodoxas”. Mais recentemente, podemos destacar a interpretação das histórias consistentes de R.B. Griffiths e Omnès (1992).

### 3. Metodologia usada nos Questionários

Tendo essas interpretações sistematizadas como pano de fundo, iremos explorar as interpretações privadas de alunos do curso de Física que cursavam a disciplina de Mecânica Quântica. Antes disso, porém, convém descrever sucintamente a metodologia que sustentou este trabalho.

Procuramos desde o início concentrar nossa estratégia de coleta de dados em *questionários escritos* dirigidos aos alunos, sendo que apenas algumas entrevistas gravadas foram realizadas. A análise feita sobre os dados foi basicamente *sincrônica*, ou seja, não se estendeu num acompanhamento cronológico sobre um ou mais alunos, outrossim num retrato instantâneo de suas concepções num determinado momento (apesar de termos realizados alguns estudos de correlação, conforme veremos). Acreditamos que um estudo mais profundo possa ser desenvolvido num estágio posterior, lançando-se mão, inclusive, de elementos da teoria de mudança conceitual.

Redigimos, ao todo, três questionários, abordando basicamente cinco temas: experimento da dupla fenda, princípio de incerteza, interpretação de estado, retrodição e postulado de projeção. O primeiro questionário apresentou apenas questões “abertas” ou de respostas discursivas, na esperança de que os alunos revelassem traços de sua concepção intuitiva (interpretação privada) nas respostas. Constatamos, porém, que os alunos manipulam bem as frases prontas que aprenderam, e sabem esconder bem suas dúvidas e confusões. Isto nos levou a elaborar um segundo questionário, contendo apenas questões “fechadas” ou de alternativas dirigidas, onde cada resposta leva a um leque de opções em direção a outras alternativas. Finalmente, elaboramos um último questionário com questões abertas e fechadas.

Para melhor poder-se acompanhar nossa discussão a respeito destas questões, apresentamos abaixo um esquema dos assuntos abordados em cada uma delas, com as respectivas turmas. Adotaremos algarismos romanos para identificar o número do questionário e indo-arábicos para o número de cada questão:

**Questionário I** (*questões abertas*) (Turmas 1 e 2):

**I.1** - Experimento da dupla fenda.

**I.2** - Princípio de incerteza.

**I.3** – Retrodição.

**Questionário II** (*questões fechadas*) (Turmas 3-7):

**II.1** - Experimento da dupla fenda.

**II.2** - Princípio de incerteza.

**II.3** - Interpretação do estado quântico / Retrodição.

**Questionário III** (*questões abertas, 1 e 3, e fechada, 2*) (Turmas 4, 6, 7 e 8):

**III.1** – Retrodição.

**III.2** - Princípio de incerteza.

**III.3** - Postulado da projeção.

Aplicamos os questionários a 8 turmas de Mecânica Quântica, no período final destes cursos, com exceção da turma 2, na qual foram aplicados no primeiro dia de aula (para alunos que já tinham feito um curso introdutório de Mecânica Quântica). Todas as turmas eram do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, com exceção da turma 7, do Instituto de Física da Universidade Federal do Paraná. Um total de 121 questionários foram respondidos, o que

corresponde a um número um pouco menor de alunos, pois alguns responderam mais de um questionário, em turmas diferentes (ver Tabela 1). Cada aluno e professor recebeu um nome fictício.

Turma	Disciplina	Época	Professor	Nº de alunos
T1	MQ II (grad.)	2º sem. 1995	Alberto	14
T2	FMQ (pós)	2º sem. 1996	Ervino	15
T3	MQ II (grad.)	2º sem. 1996	Alberto	7
T4	MQ I (pós)	1º sem. 1997	Niels	17
T5	MQ I (pós)	1º sem. 1997	Werner	24
T6	MQ II (grad.)	2º sem. 1997	Alberto	22
T7	MQ (grad.) UFPR	2º sem. 1997	Max	10
T8	MQ II (grad.)	2º sem. 1998	Alberto	12

*Tabela 1. Perfil das turmas para as quais foram dados questionários.*

No cômputo das porcentagens (estatísticas) foram desconsideradas as questões respondidas em desacordo com as instruções dos questionários. Nas próximas seções, iremos discorrer sobre os temas abordados nas questões, apontando para alguns traços das interpretações dos alunos. (Temos obrigação de antecipar que nossa análise não é inteiramente objetiva, e que algumas conclusões podem ter sido influenciadas pelas predisposições dos autores. Esperamos que a argúcia do leitor detecte esses momentos.)

#### 4. Experimento da Dupla Fenda

A questão I.1, dada para as turmas T1 e T2, foi a seguinte:

**I.1.** Um feixe de elétrons passa por duas fendas e forma um padrão de interferência numa tela cintiladora. O que acontece quando apenas 1 elétron passa pelas fendas?

Esperávamos que os alunos respondessem que haveria apenas uma cintilação pontual na tela, sem a formação de um padrão espacialmente estendido. Uma resposta mais completa diria que a probabilidade de cair em certas posições depende de  $|\psi(x)|^2$ , que tem uma dependência de tipo  $\cos^2 x$ , coincidindo com o padrão visual de interferência no caso de muitos elétrons (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1973, pp. 12-3; Pessoa, 1997, pp. 28-9).

Dos alunos da turma T1, cerca de dois terços (71%) responderam de forma correta (“teremos apenas uma cintilação”, Caio), mas apenas 14% do total deram uma resposta completa. Na turma T2, apenas 20% indicaram que o elétron “se materializa num ponto da tela” (Doug); destes, apenas um acertou em cheio: “Um único elétron será detectado em uma posição compatível com o padrão de interferência obtido para um grande número de elétrons” (Walter).

Nesta mesma turma (T2) a grande maioria (80%) concordou que “observa-se o padrão de interferência na tela cintiladora” (Fabiola), indicando uma visão ondulatória simplista e incompleta, pois estes alunos não salientaram que ocorre uma detecção pontual. Em contraste, apenas 29% da turma T1 adotou este ponto de vista, como Luísa, que respondeu simplesmente que “forma o mesmo padrão que o feixe”.

Será que Luísa cometeu um erro de conteúdo físico ou apenas definiu “padrão” de uma maneira equivocada? Questões com respostas abertas permitem que o aluno jogue com a ambigüidade contida na definição de certas palavras, de forma a esconder as suas dúvidas. Paulo respondeu corretamente que “não forma o padrão de interferência”, mas será que ele sabe que o elétron tem probabilidades diferentes de cair em regiões diferentes?

Apesar destes problemas envolvendo respostas abertas, é inegável que tais questões são bastante reveladoras com relação aos processos cognitivos dos alunos, evidenciando, por vezes, que o nosso conhecimento não é perfeitamente integrado. Podemos utilizar representações internas distintas e até contraditórias para analisar um problema. Veremos, ao longo desta análise, como um mesmo aluno utiliza amíude interpretações diferentes da mecânica quântica para lidar com diferentes problemas.

Tendo-se em vista as ambigüidades permitidas por questionários abertos, resolvemos reelaborar esta pergunta no segundo questionário, na forma de alternativas dirigidas (questão II.1, DUPLA FENDA):

<b>II.1.</b> Um feixe de eletron passa por duas fendas e forma um padrão de interferência em uma tela cintiladora. O que acontece quando apenas 1 elétron passa pelas fendas?					
<b>a)</b> Ele forma um padrão de interferência bem fraco na tela.		<b>b)</b> Ele incide em apenas um ponto da tela, formando uma cintilação pontual.			
É ainda possível obter um padrão de interferência mais fraco ainda?		A intensidade do brilho da cintilação pontual formada vai depender da posição em que o elétron cai na tela?			
<b>c)</b> Não, porque não é possível dividir o elétron.	<b>d)</b> Sim, desde que se altere a velocidade do elétron ou a distância entre a tela e as fendas.	<b>c)</b> Sim, irá depender.		<b>d)</b> Não, a intensidade do brilho é a mesma.	
		A probabilidade de um elétron gerar uma cintilação em um ponto vai depender da posição deste ponto?		Em que região da tela cintiladora vai incidir o elétron?	
		<b>e)</b> Sim.	<b>f)</b> Não.	<b>e)</b> Em qualquer ponto.	<b>f)</b> Só em alguns pontos.
15 %	31 %	9 %	4 %	25 %	16 %
	Visão Ondulatória Clássica			Visão Corpuscular Clássica	Resposta Correta

Tabela 2. Questão II.1 sobre a DUPLA FENDA, com alternativas dirigidas (questão fechada). Na penúltima linha aparecem as porcentagens de alunos que escolheram cada alternativa, e na última nomeiam-se algumas visões que serão usadas na seção 6.

Esta questão foi entregue aos alunos das turmas T3 a T7. Para nossa surpresa, quase metade dos 78 alunos (46%) errou já na primeira pergunta, assinalando a alternativa 1a: “Ele forma um padrão de interferência bem fraco na tela”. Isto indica alguma falha nos cursos de Mecânica

Quântica, pois a questão apresentada é uma das mais básicas da física quântica. Isto provavelmente se deve à excessiva ênfase que os cursos dão à parte matemática em detrimento de análises fenomenológicas e conceituais. (O problema não estaria em apresentar a matemática, mas em negligenciar os aspectos conceituais e de interpretação.)

Dentre os que erraram, é interessante examinar como eles responderam à pergunta seguinte: “É possível obter um padrão de interferência mais fraco ainda?”. Dois terços dos que erraram mantiveram-se fiéis à visão ondulatória clássica, concordando que a onda associada ao elétron pode ser dividida o quanto se queira (alternativa 1ad). O outro terço caiu numa contradição, pois anteriormente conferiu ao fenômeno caráter ondulatório e em seguida respondeu de maneira corpuscular, ao dizer que é impossível dividir o elétron (1ac).

Esta contradição indica que um estudante muitas vezes utiliza diferentes *scripts* (mini-teorias) ou imagens ao tratar de diferentes aspectos de problemas novos e difíceis (2). O estudante ora utiliza uma idéia que aprendeu em aula, ora utiliza outra, sem perceber as eventuais contradições (essa mistura de *scripts* pode acontecer para um mesmo problema, ou pode acontecer ao se passar de um problema para outro). Esta *mistura de interpretações privadas* é especialmente forte com relação à teoria quântica, pois tal teoria utiliza descrições ondulatórias e corpusculares (sem porém cair em contradição, conforme indicado na seção 2). Dado que esta teoria utiliza concepções aparentemente contraditórias, talvez alguns alunos tenham percebido as contradições em que caíram sem se preocupar com isso.

Por fim, vale reconhecer que o enunciado impreciso da alternativa correta, 1bdf, pode ter enganado os alunos que chegaram até este ponto. Ao invés de escrever que o elétron pode incidir “só em alguns pontos”, melhor seria exprimir a idéia de que há alguns pontos (de interferência destrutiva) nos quais o elétron *não* pode incidir.

## 5. Interpretações do Estado Quântico

O objetivo deste trabalho é investigar as interpretações privadas dos alunos. Vimos na seção 2 os quatro grandes grupos em que se dividem as interpretações oficiais da teoria quântica: ondulatória, da onda piloto (ou dualismo realista), da complementaridade (ou dualismo positivista) e dos ensembles estatísticos (que incluem visões explicitamente corpusculares). Nossa pergunta é como estas interpretações se dividem no pensamento dos alunos.

Na questão II.1 sobre a dupla fenda, encerramos perguntando sobre o FENÔMENO:

II.1. (final) Este experimento em particular (com 1 elétron) é um exemplo de:		
g) Fenômeno ondulatório.	h) Fenômeno corpuscular.	i) Fenômeno dual: onda e partícula.
19%	14%	67%

Tabela 3. Final da questão II.1, sobre o FENÔMENO, com alternativas dirigidas.

Sabemos que a palavra “dualismo” está fortemente associada à teoria quântica na mente dos alunos, e assim supusemos que a maioria responderia esta alternativa, apesar de esta resposta estar errada, na acepção de Bohr (que é usualmente ensinada nos textos tradicionais). Dois terços responderam que o fenômeno é dual, ao passo que para Bohr um “fenômeno” é *ou* corpuscular, *ou*

ondulatório. A resposta correta (na acepção de Bohr) seria dizer que o fenômeno é ondulatório (19% assim responderam), pois há um padrão de interferência, e é impossível inferir por qual fenda o elétron passou. O fato de a maioria dos alunos interpretar o fenômeno como dual indica não só que a concepção de Bohr não é muito trabalhada nos cursos, mas também, talvez, que a visão dualista realista é forte entre os alunos, em um nível privado. (É comum partidários da visão ortodoxa defenderem que este experimento revela a “coexistência” de aspectos corpusculares e ondulatórios. Esta afirmação, porém, está mais próxima da interpretação oficial dualista realista do que da interpretação oficial ortodoxa. Ver discussão desta “dualidade onda-partícula fraca” em Pessoa, 1997, seção II.)

Para esclarecer melhor este tema, consideremos a questão II.3, que versa sobre a experiência de STERN-GERLACH em regime quântico:

<p><b>II.3.</b> Considere o experimento de Stern-Gerlach para um único átomo de prata, inicialmente no estado <math> +x\rangle</math>. Após passar pelo ímã, podemos representar seu estado por <math> \psi\rangle = (1/\sqrt{2}) +z\rangle + (1/\sqrt{2}) -z\rangle</math>. Antes de medir a posição do átomo, podemos dizer que ele está <i>ou</i> com o componente de spin <math>+z</math> na posição <i>A</i>, ou com componente <math>-z</math> na posição <i>B</i>?</p>			
<p><b>a)</b> Sim. Após passar pelo ímã, o átomo está em <i>A</i> (e não tem nada em <i>B</i>), ou está em <i>B</i> (e não tem nada em <i>A</i>). Só que ainda ignoramos onde ele está.</p>		<p><b>b)</b> Não. Não podemos dizer que o átomo está em <i>A</i> (e não tem nada em <i>B</i>), ou está em <i>B</i> (e não tem nada em <i>A</i>).</p>	
<p>Devemos dizer que o átomo está em <i>A</i> ou em <i>B</i>, e que há uma onda associada distribuída entre <i>A</i> e <i>B</i>?</p>		<p>Podemos dizer que há uma onda (ou uma amplitude de probabilidade) simetricamente distribuída entre <i>A</i> e <i>B</i>, e que o átomo não está nem em <i>A</i>, nem em <i>B</i>?</p>	
<p><b>c)</b> Sim.</p>	<p><b>d)</b> Não.</p>	<p><b>c)</b> Sim.</p>	<p><b>d)</b> Não. Só podemos falar alguma coisa depois que o experimento estiver completado</p>
<p>31 %</p>	<p>9 %</p>	<p>41 %</p>	<p>19 %</p>
<p>Interpretação da Onda Piloto</p>	<p>Int. dos Ensembles Estatísticos (versão corpuscular)</p>	<p>Interpretação Ondulatória</p>	<p>Interpretação da Complementaridade</p>

Tabela 4. Questão II.3 sobre STERN-GERLACH, de alternativas dirigidas, com as porcentagens de respostas na penúltima linha, e a interpretação associada na última linha.

A pergunta se refere ao estado do átomo de prata depois de passar pelo ímã analisador mas *antes* de ser detectado. Esta questão é útil para captar a interpretação privada dos alunos, pois não faz uma pergunta direta sobre a interpretação preferida ou sobre o tipo de fenômeno (como feita no final da questão II.1), embora o encaminhamento das respostas nos mostre claramente as inclinações interpretativas dos alunos.

Na primeira das perguntas referentes a esta questão, o aluno foi convidado a responder se o átomo tem posição e componente *z* de spin bem definidos antes de ser detectado. Dois quintos

(40%) responderam que sim, adotando uma postura realista em relação à existência da partícula e de seu respectivo spin; 60% responderam que o átomo não está bem localizado em nenhum dos caminhos. Dos que atribuíram realidade exclusivamente corpuscular à partícula não medida, a maior parte (31% do total dos entrevistados) concordou, quando perguntada em seguida (3a), que há uma onda associada distribuída entre os caminhos *A* e *B*. Esta é justamente a interpretação da onda piloto. Os que negaram a existência desta onda (9% do total) recaíram numa posição puramente corpuscular, consistente com a interpretação dos ensembles estatísticos (pelo menos com a de Landé).

A pergunta seguinte (3b) foi feita para aqueles que negaram que há apenas o corpúsculo antes da detecção (ou seja, negaram que o objeto quântico estivesse inteiramente localizado em uma posição bem definida). Argüiu-se, então, se haveria apenas uma onda (ou amplitude de probabilidade) distribuída simetricamente entre os dois caminhos. A maioria (41% do total) respondeu afirmativamente, caracterizando uma interpretação ondulatória. Esta questão não distinguiu entre aqueles que acreditam que a onda existe na realidade e aqueles que a consideram apenas um construto matemático, ligado ao termo “amplitude de probabilidade”. Por fim, apenas 19% do total seguiram à risca a interpretação ortodoxa, concordando que só podemos “falar alguma coisa” depois que o experimento estiver terminado (a bem da verdade, esta última expressão entre aspas foi mal formulada, pois antes do experimento pode-se “falar” quais são as probabilidades).

Devemos reconhecer que, de maneira geral, esta questão II.3 não foi muito bem formulada, já que um seguidor rigoroso da interpretação da onda piloto acabaria no item 3b sem ter uma alternativa adequada. Ou seja, os 31% que chegaram na alternativa 3ac foram, a rigor, inconsistentes (pois o item a salienta que “não tem nada” no outro caminho, ao passo que o item c afirma que “há uma onda associada”). Mesmo assim, podemos concluir com os seguintes dados aproximados: 40% dos alunos apresentou uma visão ondulatória, 30% uma interpretação dualista realista, 20% a visão ortodoxa e 10% uma estritamente corpuscular. Acreditamos, porém, que se perguntássemos qual seria a interpretação preferida de cada um, a maioria seguiria seus professores e escolheria a ortodoxa. Chegamos assim à seguinte tese: uma coisa é defender explicitamente ou *oficialmente* uma interpretação, outra é utilizar implicitamente as interpretações para entender diferentes problemas de Física Quântica (o “abismo entre a prédica e a prática”, segundo um dos árbitros deste artigo). É possível criticar nossa abordagem argumentando que interpretações privadas são incomensuráveis com as oficiais; cremos que esta crítica é interessante, mas preferimos postergar sua discussão e trabalhar com a hipótese de que as duas sejam comensuráveis, para ver que conclusões podem ser tiradas.

## 6. Dependência entre as Respostas sobre Interpretações

O problema a ser investigado agora é se as interpretações privadas utilizadas implicitamente em diferentes problemas são as mesmas ou não. Por exemplo, se um aluno adota uma visão ondulatória ao analisar o experimento da dupla fenda, haveria uma chance maior de ele adotar uma interpretação ondulatória quanto à experiência de Stern-Gerlach? Para investigar isso, estudamos a dependência estatística entre pares de respostas dadas por cada aluno. Sem querer soterrar o leitor com dados numéricos, apresentaremos aqui apenas as conclusões principais. (3)

Com relação às questões II.1 e II.3, aplicamos essa análise para os três grupos de respostas vistas anteriormente, que chamamos DUPLA FENDA (respostas 1ad, 1bde, 1bdf da Tabela 2, lembrando que apenas uma delas é correta: 1bdf), FENÔMENO (Tabela 3) e STERN-GERLACH (Tabela 4), envolvendo 33 alunos.

A primeira comparação a ser feita é entre os grupos DUPLA FENDA e FENÔMENO, que foram formulados na mesma questão II.1. Quem adotou uma visão ondulatória clássica (1ad) para analisar o experimento da dupla fenda tendeu a considerar o fenômeno “ondulatório” (1g); quem adotou uma visão corpuscular clássica (1bde) tendeu a achar o fenômeno “corpuscular” (1h); e quem optou pela resposta correta (1bdf) tendeu a considerar o fenômeno “dual” (1i). Isto significa que a interpretação implícita que atribuímos a cada aluno (primeiro grupo) correlacionou-se positivamente com o julgamento que o próprio aluno deu sobre o fenômeno, o que parece indicar que, após responder às perguntas iniciais desta questão, ele manteve a mesma perspectiva teórica (permaneceu no mesmo *script*) para responder ao item final da mesma questão.

Comparemos agora as interpretações privadas utilizadas em questões diferentes. Devemos esperar uma dependência estatística? Comparando os grupos DUPLA FENDA e STERN-GERLACH ocorreram duas correlações esperadas: quem respondeu de acordo com a interpretação dos ensembles (3ad), que no caso consiste de uma visão corpuscular (seção 2), tendeu a adotar uma visão corpuscular na primeira questão (1bde) e a rejeitar a visão ondulatória (1ad). Por outro lado, quem adotou esta visão ondulatória, acabou optando preferencialmente por uma interpretação diferente, a da onda piloto (3ac). Outra correlação inesperada é que os que acertaram a primeira questão (1bdf) tenderam a adotar a interpretação dos ensembles (3ad).

Por fim, comparando os grupos FENÔMENO e STERN-GERLACH, encontramos correlações inesperadas mas interessantes. Há uma forte dependência entre os que adotaram uma interpretação positivista, ou da complementaridade (3bd), e os que consideraram a dupla fenda um fenômeno corpuscular (1h). Quem considerou este fenômeno ondulatório (1g) não pensou em termos ondulatórios no experimento de Stern-Gerlach (3bc).

Notamos, em suma, que as dependências estatísticas entre os grupos DUPLA FENDA e STERN-GERLACH são fortes e mostram, de maneira geral, uma coerência quanto às interpretações privadas dos alunos em relação a esses experimentos. Devemos salientar que esses dois grupos envolvem interpretações implícitas dos alunos, pois as perguntas se referem apenas a detalhes do experimento em si, enquanto que o grupo FENÔMENO se refere à parte da questão II.1 que solicita uma opinião explícita sobre a natureza do fenômeno, sem que esta opinião esteja ligada necessariamente ao modo com o qual o aluno interpreta o experimento.

Como evidência de que as respostas do grupo FENÔMENO não foram dadas por meio dos mesmos procedimentos interpretativos que as dos outros grupos, chamamos atenção ao fato de que a resposta 1i (escolhida por 2/3 dos alunos) é estatisticamente independente (de forma quase absoluta) das outras respostas. Isto indica que a palavra “dual” invoca um conceito bastante forte acima dos diversos *scripts* interpretativos associados à física quântica.

## 7. Princípio de Incerteza

O princípio de incerteza foi explorado nos três questionários, buscando-se captar as interpretações que os alunos possuem sobre tal princípio. Existem basicamente duas interpretações sistematizadas a respeito do princípio (Jammer, 1974, p. 80; Pessoa, 1997, pp. 43-4). A primeira, que podemos chamar de *definição individual* e é defendida pelas interpretações ortodoxa e ondulatória, afirma que o princípio de incerteza se aplica a objetos individuais, havendo uma limitação na possibilidade de medir-se simultaneamente duas grandezas incompatíveis com resolução tão boa quanto se queira. A segunda, a *definição estatística* da interpretação dos ensembles estatísticos e aceita pela interpretação da onda piloto, diz que o princípio se aplica apenas

a *ensembles* de eventos ou partículas, e é chamado pelos seus defensores de “princípio de dispersão estatística” (Ballentine, 1970).

A questão I.2, de resposta aberta, diz:

**I.2. Enuncie o Princípio de Incerteza. Procure dar um exemplo.**

Os alunos enunciaram o princípio de forma semelhante, só alterando algumas palavras. Dos 28 que responderam, 13 não fizeram nenhuma menção à “exatidão” das medições (usamos exatidão como um termo geral e neutro para nos referirmos a termos mais exatos como “precisão”, “resolução”, “incerteza”, etc.). Yuri, por exemplo, respondeu: “Você não pode determinar a posição e a velocidade de uma partícula simultaneamente”. A rigor, isto está errado, pois podemos fazer medidas grosseiras de ambas simultaneamente.

Os outros alunos utilizaram vários termos diferentes para designar que o princípio impõe uma limitação na exatidão da medição simultânea de grandezas conjugadas. Estes termos se espalham entre dois pólos: de um lado, eles se referem a características de medições, como “precisão”, “resolução”; do outro, eles se referem de maneira antropocêntrica ao nosso “conhecimento”, à “ignorância”. Termos que se colocam entre estes dois pólos foram usados, como “incerteza”, e como na seguinte colocação de Paulo: “[...] se for possível determinar o momento perco informação sobre a posição e vice-versa.”

O termo “*precisão*” foi o mais usado (43% do total dos alunos): “Na medida de dois observáveis relacionados nunca podemos ter uma precisão superior a um valor mínimo.  $\Delta p_1 \Delta x_1 \geq \hbar/2$ ” (Caio). Deve-se notar que a definição rigorosa de “precisão” aceita hoje em dia associa este termo ao desvio-padrão de várias medidas; pelo contexto, porém, vimos que os alunos não queriam dizer isso, mas pareciam pensar na “resolução” de uma medição individual.

Um quarto do total de alunos disse que, ao medirmos  $x$ , *ignoramos* o valor de  $p_x$ , ou seja, o princípio se referiria ao nosso conhecimento da realidade. Vejamos alguns trechos da resposta de Madalena: “Não é possível saber com exatidão o momento  $p_x$  e a posição de uma partícula. A partir do momento que você determina uma posição, você perde a informação do ‘momento’ da partícula [...]”.

Com relação à idéia de que o princípio de incerteza descreve o *distúrbio* de uma medição de  $x$  (por exemplo) no valor de  $p_x$ , visão esta que está implícita no trabalho original de Heisenberg (ou seja, nesta visão semi-clássica,  $x$  e  $p_x$  teriam valores simultâneos bem definidos mas a medição de um alteraria o valor do outro de maneira imprevisível), apenas cinco alunos (18%) a colocaram. Luiza a enunciou de maneira clara: “Quanto mais se precisa a posição  $x$ , maior é a interferência no momento  $p$  [...]”.

Apenas um aluno (4% do total) adotou a definição estatística mencionada acima: “As dispersões das medidas de momento e posição não podem ser arbitrariamente pequenas, simultaneamente” (Oscar). Este aluno cursava a pós-graduação no Depto. de Física Matemática, onde, segundo observamos em conversas, muitos professores adotam essa visão (“Eu procuro deixar claro para meus alunos que a mecânica quântica é essencialmente uma teoria estatística”, prof. Paul).

Nenhum aluno quis entrar em detalhes sobre questões ontológicas, como por exemplo se  $x$  e  $p$  teriam valores simultaneamente exatos, mas haveria uma impossibilidade de medir os dois, etc.

Isso nos levou a elaborar uma questão (II.2) com resposta fechada para introduzir o aluno a esses problemas.

<b>II.2.</b> A relação de incerteza (por exemplo, para posição $x$ e momento $p_x$ ) é uma limitação estatística ou ela também se aplica a sistemas <i>individuais</i> ?						
a) Apenas estatística. É possível medir $x$ e $p_x$ de um único sistema com resoluções $\delta x$ e $\delta p_x$ que violem a relação de incerteza. Apenas para várias medições (caso estatístico) é que os desvios padrão dos resultados obedecem à relação de incerteza.			b) A Relação vale também no caso individual. Ela impõe um limite na resolução de $\delta x$ e $\delta p_x$ .			
Na prática, é possível montar um experimento que meça simultaneamente $x$ e $p_x$ com resoluções $\delta x$ e $\delta p_x$ que violem a relação de incerteza?			Podemos dizer que o sistema tem sempre valores simultaneamente bem definidos $x$ e $p_x$ , mas que nós não temos acesso a esses valores através de experimentos?			
c) Sim.		d) Não. Na prática não.		e) Sim. Se meço $x$ , passo a ignorar qual é o valor possuído por $p_x$ .		d) Não. Se $x$ for bem definido, $p_x$ não terá valor bem definido.
Podemos dizer que esses valores medidos eram simultaneamente possuídos pelo sistema antes da medição?			Podemos dizer que o elétron possui simultaneamente valores de $x$ e $p_x$ bem definidos (com boa resolução) antes da medição?			
e) Sim. Uma boa medição revela os valores pré-existentes.	f) Não. A medição altera os valores (que antes já eram bem definidos, mas desconhecidos) de maneira imprevisível.	g) Não. Não podemos dizer que o sistema possuía simultaneamente valores bem definidos para $x$ e $p_x$ antes da medição.	e) Sim. Porém, não podemos revelar estes valores através de uma medição.	f) Não. Não podemos dizer que possuía simultaneamente valores bem definidos para $x$ e $p_x$ antes da medição.		
0 %	0 %	1 %	3 %	3 %	32%	61%

Tabela 5. Questão II.2 sobre INCERTEZA, de alternativas dirigidas.

Consistentemente com os dados da questão I.2, apenas 7% dos 70 que responderam à questão optaram pela definição estatística (alternativa 2a). Da grande maioria que concordou que a limitação vale também para o caso individual (alternativa 2b), um terço optou pela alternativa 2bc, que propugna que o sistema sempre possui valores simultaneamente bem definidos de posição e momento, de forma consistente com uma visão corpuscular ou uma dualista realista. Os outros dois terços responderam que não (2bd): “Não. Se  $x$  for bem definido,  $p_x$  não terá valor bem definido”.

Portanto, a maioria (61%) adotou implicitamente ou a interpretação ondulatória (pois pacotes de onda, sem corpúsculo associado, não têm essas grandezas bem definidas) ou a da complementaridade (lembramos com Jammer, 1974, p. 69, das próprias palavras de Bohr, 2000, p. 143, limitando a definição simultânea de grandezas conjugadas).

## 8. Dependência Estatística envolvendo o Princípio de Incerteza

Como essas escolhas se correlacionam com as outras interpretações adotadas no questionário II? A questão II.3, envolvendo o aparelho de Stern-Gerlach, também perguntou se um átomo tinha propriedades bem definidas antes de ser medido (no caso, a grandeza envolvida foi somente a posição, e não pares de grandezas conjugadas como na questão II.2). E os alunos se distribuíram de maneira semelhante: uma razoável minoria optou pela visão com propriedades bem definidas (2bc, 3a) enquanto que uma folgada maioria aceitou que propriedades podem não ter definição antes da medição (2bd, 3b). Assim, ao examinar a dependência estatística entre essas escolhas, seria de se esperar que quem optou pela visão com propriedades bem definidas em um caso também o faria no outro (o mesmo acontecendo para a opção por propriedades mal definidas). Surpreendentemente, não foi o que verificamos. Praticamente não há dependência estatística entre as respostas “propriedades bem definidas” (ou seja, o número de alunos que escolheu estas duas respostas não foi significativamente maior ou menor do que se esperaria pelo mero acaso), assim como não há entre as respostas “propriedades mal definidas”. Ou seja, correspondem a escolhas independentes.

O que isso sugere é que o *script* interpretativo usado quando o aluno pensa sobre o princípio de incerteza é bastante diferente daquele usado quando pensa sobre os estados quânticos no aparelho de Stern-Gerlach ou na dupla fenda.

Comparando as respostas do grupo INCERTEZA (Tabela 5) com o grupo DUPLA FENDA, poderíamos esperar uma dependência estatística entre as duas respostas consistentes com a visão ondulatória (1ad, 2bd) ou entre as duas pertinentes à visão corpuscular (1bde, 2bc), mas tais dependências são muito fracas, salvo por uma correlação negativa (que seria esperável) entre uma visão ondulatória clássica (1ad) e a noção de que  $x$  e  $p_x$  têm simultaneamente valores bem definidos. A única correlação positiva forte parece sugerir que quem tem uma boa intuição sobre a mecânica quântica (acertando a questão da dupla fenda em 1bdf) tende a pensar no princípio de incerteza (2bc) nos moldes da interpretação original de Heisenberg (o que, curiosamente, é consistente com a interpretação da onda piloto; ver Pessoa, 1997, p. 43).

A comparação entre os grupos de resposta INCERTEZA e FENÔMENO também vai contra o que esperaríamos se os alunos seguissem de maneira consistente o mesmo *script* interpretativo. Com efeito, quem concebe o princípio de incerteza de uma maneira corpuscular (2bc) tende a considerar o experimento da dupla fenda um fenômeno ondulatório (1g) e não corpuscular.

Por fim, esmiuçando a comparação já feita (no início desta seção) entre os grupos INCERTEZA e STERN-GERLACH (considerando não apenas as respostas 3a e 3b, mas também as restantes), constatamos apenas uma dependência que seria de se esperar entre respostas corpusculares (2bc e 3ad), consistentes com a interpretação dos ensembles.

Em suma, apesar desta última correlação positiva, mantemos a conclusão apresentada acima de que os alunos parecem utilizar *scripts* interpretativos diferentes ao tratar do princípio de incerteza e ao tratar de questões envolvendo a interpretação do estado quântico.

## 9. A Terceira Questão sobre o Princípio de Incerteza

Uma última questão sobre o Princípio de Incerteza (III.2) foi de múltipla escolha, e admitia mais de uma alternativa como resposta. No total, 59 alunos responderam à questão:

<b>III.2.</b> Considere um átomo inicialmente isolado. Medimos então sua posição com excelente resolução ( $\delta x \sim 0$ ). Levando em conta o princípio de incerteza, o que podemos dizer sobre o momento do átomo (logo após a medição)?				
<b>a)</b> O átomo <u>tem</u> um momento bem definido, mas ignoramos qual é o seu valor. Este valor pode ser revelado por uma medição subsequente.	<b>b)</b> O átomo <u>tem</u> um momento bem definido, mas ignoramos qual é o seu valor. Uma medição subsequente não revela este valor porque o ato da medição altera o valor do momento.	<b>c)</b> O átomo <u>não tem</u> um valor bem definido de momento.	<b>d)</b> <u>Não faz sentido</u> falar de um valor para o momento. Só podemos falar sobre isso após uma medição de momento.	<b>e)</b> A Mecânica Quântica não faz afirmações sobre eventos individuais, apenas sobre <u>ensembles estatísticos</u> .
9%	34%	36%	7%	14%
Interpretação dos ensembles estatísticos, ou da onda piloto	Realismo corpuscular com medições não fidedignas	Int. ondulatória, ou da complementaridade	Versão mais positivista da int. da complementaridade	Int. dos ensembles, versão mínima

Tabela 6. Questão III.2 sobre o princípio de incerteza. As porcentagens de respostas na penúltima linha se referem a um total de 74 respostas dadas pelos 59 alunos.

As alternativas (a) e (b) correspondem a uma visão realista na qual o corpúsculo possui posição e momento bem definidos simultaneamente, embora ignoremos quais sejam esses valores. A primeira alternativa se encaixa na interpretação dos ensembles estatísticos e seria a escolhida por Ballentine: uma medida subsequente de momento nos revelaria seu valor. A segunda alternativa não considera que essa medição subsequente possa revelar esse valor de momento possuído pela partícula; teríamos, assim, um realismo com medidas “não fidedignas”. Apesar da interpretação da onda piloto (dualismo realista) de Bohm considerar que, em geral, medições de momento não sejam fidedignas, neste exemplo ela defenderia a alternativa (a).

A alternativa (c), que diz que o átomo não tem valor bem definido de momento, é consistente com uma visão realista ondulatória e também com a interpretação da complementaridade. Já a alternativa (d) salienta o aspecto positivista da interpretação ortodoxa: não faz sentido falar sobre aquilo que não podemos medir. Por sua vez, a alternativa (e) denota uma versão “mínima” da interpretação dos ensembles estatísticos, pois não dá margem a descrições de eventos individuais dentro da Teoria Quântica.

Notamos que nesta questão em particular a resposta mais escolhida foi a tradicional visão da interpretação de Copenhague, embora esta resposta (c) dê margem, também, a uma interpretação realista em termos de ondas, segundo a qual o átomo *não possui* valor bem definido de momento.

Um número significativo de alunos optou pela alternativa (b), talvez porque na resposta surja a frase “o ato da medição altera o valor do momento”, que, como sabemos, está fortemente ligada ao enunciado do princípio da incerteza feito originalmente por Heisenberg. Acontece que em

nosso caso, estávamos nos referindo ao distúrbio no valor do momento que ocorreria na medição de *momento*, e não na de posição (como no caso original de Heisenberg). Em suma, é provável que o aluno tenha escolhida esta resposta devido ao seu enunciado não muito claro, já que a frase citada lembrou-lhe de algo aprendido em classe.

De qualquer forma, independente desta ambigüidade, notamos que 43% das respostas se encaixaram numa visão que se enquadra no realismo corpuscular da interpretação dos ensembles estatísticos, somando as respostas dadas aos itens (a) e (b). Por contraste, em uma questão semelhante no questionário II, 32% responderam de maneira análoga (resposta 2bc).

Cabe lembrarmos que, no questionário anterior, uma minoria (7%) optou por uma interpretação puramente estatística (resposta 2a), o que condiz com os resultados deste terceiro questionário, que apresentou 10 respostas em 59 para a alternativa (e) (porém, quase todos dentre estes também escolheram uma outra resposta à questão). No segundo questionário, um terço de alunos admitiu a existência de  $x$  e  $p_x$  simultaneamente e dois terços abraçaram a interpretação de Copenhague. Neste, em contraste, a divisão foi meio-a-meio (metade respondeu (a) e (b) e a outra metade (c) e (d)).

## 10. A Retrodição

A retrodição é, desde a época de Bohr e Heisenberg, uma questão controversa (ver Bohr, 2000, p. 145). *Após* medirmos a posição de uma partícula, podemos sempre dizer que *antes* da medição a partícula se encontrava próxima ao ponto em que foi detectada? Se um quantum atravessa uma fenda fina (sofrendo difração) e incide em um detector localizado a uma certa distância, podemos dizer (após a medição) que o quantum seguiu uma trajetória retilínea da fenda até o detector? Quem aceita a retrodição responde afirmativamente a estas duas questões (ver Pessoa, 2002, seção XI.7; para mais detalhes, Pessoa, 2000).

Este assunto foi explorado em três questões. A questão I.3 trata o problema de maneira abstrata, discursiva, a partir de uma função de onda envolvendo uma superposição de dois autoestados:

**I.3.** O estado de um sistema é dado por  $|\Psi\rangle = (1/2)|\psi_1\rangle + (\sqrt{3}/4)|\psi_2\rangle$ , onde  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  são autoestados de um observável, com autovalores  $q_1$  e  $q_2$ . Suponha que este observável seja medido, e o resultado obtido seja  $q_1$ . Você pode então dizer que o valor do observável *antes* da medição era  $q_1$ , ou não pode? Explique.

A esmagadora maioria dos alunos respondeu que não. (Para termos sido mais exatos, deveríamos ter escrito “imediatamente *antes*”.) Destes, muitos se exprimiram de maneira semelhante a Paulo: “posso somente calcular qual a probabilidade do resultado ser  $q_1$ ”. Alguns poucos, como Guilherme, foram mais precisos: “Não, pois antes da medição os autovalores não eram determinados”. Diversos outros invocaram a noção de distúrbio, usualmente associada ao princípio de incerteza: “Não posso, pois, ao medir esse observável eu interferi no sistema” (Madalena). Dos 29 alunos, o único que respondeu afirmativamente foi um pouco ambíguo: “o valor  $q_1$  é uma estatística, por isso você pode dizer que é o valor da medição ou antes dela” (Eduardo).

A partir desses resultados poderíamos concluir taxativamente que os alunos submetidos ao questionário não aceitam a retrodição. No entanto, se formularmos a questão num contexto diferente, veremos que isso não é verdade. A questão II.3, que já examinamos na seção 5, formula a questão com relação a um experimento concreto, o de Stern-Gerlach, sendo apresentada uma figura em que as trajetórias das partículas são pontilhadas (ver Tabela 4). Neste caso, conforme já vimos, 40% aceitaram que o átomo está bem localizado antes da detecção, o que equivale à aceitação da retrodição. Como explicar esta discrepância? Provavelmente os alunos não se deram conta de que a superposição existente na primeira questão se aplica também ao experimento de Stern-Gerlach. Isto ilustra o que pode acontecer quando passamos de uma análise puramente formal para um caso que se aproxima do real. (O fato de os átomos de prata serem relativamente pesados também deve ter contribuído para isso, apesar de hoje em dia ser comum a interferometria de átomos).

A última questão sobre retrodição, III.1, também priorizou o aspecto imagético, mas ao invés de desenharmos trajetórias pontilhadas (o que fizemos involuntariamente no caso anterior), apresentamos (propositadamente) ondas circulares emanando de uma fenda simples no ponto  $A$ :

<p><b>III.1.</b> Um elétron passa por uma fenda pontual <math>A</math>, sofrendo difração, e depois é detectado em <math>B</math>. Após a detecção em <math>B</math>, podemos dizer que o elétron seguiu a <u>trajetória retilínea <math>AB</math></u>? Explique.</p>	
---	--

Segundo a interpretação da complementaridade, após o elétron ser detectado no ponto  $B$  do anteparo, o fenômeno pode ser considerado corpuscular, e portanto é legítimo fazer uma retrodição e associar uma trajetória retilínea  $AB$  à partícula. No entanto, apenas 25% dos 59 que responderam à questão concordaram com esta idéia. A maioria concordou com Getúlio, que explicou: “não, pois quando o elétron passa por  $A$  e é difratado ele é uma onda”.

Em suma, vemos que há uma grande influência da maneira como se elabora uma questão sobre a resposta dos alunos. Na versão mais abstrata apenas 3% aceitaram a retrodição, ao contrário das versões com imagem. Destas, a porcentagem subiu para 40% quando se apresentou uma trajetória pontilhada e baixou para 25% quando desenhamos ondas circulares. A diferença entre a situação formal e a situação com imagem indica que os alunos utilizam interpretações privadas bem diferentes de uma situação para outra. Em outras palavras, a distinção entre a memória discursiva e a imagética também se faz presente no domínio das interpretações privadas.

## 11. Postulado da Projeção

Dentre as regras básicas da Mecânica Quântica, o Postulado da Projeção, que descreve o colapso do pacote de onda, talvez seja o menos estudado nos cursos de Física (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1977, pp. 213-25; Montenegro, 2000, seção 1.4; Pessoa, 2002, seções V.4, X.2). Na questão III.3, procuramos sondar o conhecimento dos alunos sobre este postulado:

**III.3.** Um único átomo de hidrogênio é preparado no estado  $(\sqrt{3}/2) |\psi_{200}\rangle + (1/2) |\psi_{210}\rangle$ , onde os índices dos autoestados correspondem respectivamente aos números quânticos  $n = 2$ ,  $\ell$ ,  $m_\ell = 0$ . Note que a única diferença entre os autoestados corresponde ao valor do número  $\ell$ .

(a) Se medirmos o observável cujo autovalor é  $\ell$ , qual é a probabilidade de obtermos o valor  $\ell = 0$  ?

(b) Suponha que de fato fizemos a medição e obtivemos o autovalor  $\ell = 0$ . Agora, se medíssemos novamente o mesmo observável, qual seria a probabilidade de obter o valor  $\ell = 0$  ?

O item (a) da questão envolve uma aplicação do “algoritmo estatístico” da mecânica quântica, ou seja, envolve uma simples cálculo de probabilidades de se obter um resultado, dado um vetor de estado (a probabilidade é simplesmente o quadrado do coeficiente do autoestado). Do total, 64% dos alunos acertaram esta questão, colocando a resposta  $3/4$ , o que indica que aproximadamente dois terços dos alunos entrevistados tinham uma preparação adequada na matéria. (A rigor, cometemos uma gafe ao sugerir que o autovalor associado à medição do momento angular seja  $\ell$  e não  $\ell(\ell+1)$ , mas não acreditamos que esta simplificação tenha atrapalhado os alunos.)

O item (b) considera que a medição de um operador já tenha sido feita, e pergunta qual é a probabilidade de uma medição repetida fornecer o mesmo resultado que o anterior. Segundo o Postulado da Projeção, que é reconhecido como sendo correto, apesar de nem sempre se aplicar, a probabilidade neste caso é 1, pois na primeira medição (item a) o estado colapsa para o autoestado correspondente ao resultado obtido.

Como apenas um terço dos alunos acertou o item (b), em comparação com dois terços que acertaram o item (a), concluímos que a noção de colapso, de maneira geral, tem penetração apenas razoável entre os alunos.

Chamou-nos atenção o razoável número de respostas (36% do total) que consideraram as probabilidades iguais nas duas medições sucessivas: “Seria o mesmo visto que estas medidas são independentes” (César). Vemos que esses alunos sabem fazer cálculos simples, mas não possuem uma visão mais refinada acerca do ato da medição, que contenha considerações sobre o colapso da função de onda. (Por outro lado, é possível que César não tenha entendido que as duas medições ocorreram em sucessão para um único átomo, de forma que as questão poderia ser mais clara com relação a isto.)

## 12. A Questão da Visualização

Finalizando este estudo sobre as concepções dos alunos do curso de Física, realizaram-se 3 entrevistas, com os alunos Luíza, Bruno e Breno. Os temas abordados se dividiram em cinco grupos (dualidade onda-partícula, princípio de incerteza, visualização, retrodição e impressões gerais sobre o ensino de Física Quântica), mas trataremos aqui apenas da questão da visualização. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes em Montenegro (2000, seção 5.7).

A questão da visualização foi abordada quando pedimos aos entrevistados para descreverem a *imagem* que possuem de uma entidade quântica, como o elétron. Observemos coincidências nas respostas.

*Entrevistador*: “Quando você pensa no elétron você tá pensando nele como uma partícula?”  
*Luiza*: “Tô pensando numa bolinha.” *Entrevistador*: “A parte da onda, então, neste momento, fica pra escanteio?” *Luiza*: “Não consigo imaginar. Cê pensa numa bolinha se movimentando, né, girando. Agora, pensar numa onda... não sei... é complicado”.

Agora outro entrevistado. *Entrevistador*: “Quando você pensa no elétron você imagina o quê?” *Bruno*: “Eu imagino uma bolinha, só que eu tenho comigo que ele não tá localizado. Se você pensa um pouco só de como é o sistema onde o elétron existe, você vai perceber que a velocidade que ele faz em volta do núcleo é rápida, então ele certamente está ‘dissolvido’ nesta eletrosfera. Se a gente consegue parar, digamos assim, um átomo, é uma pergunta, saber se nós vamos poder ter uma localidade específica para estar o elétron.”

Notamos assim que a visualização das entidades quânticas como partículas é uma tendência bastante natural entre alunos, podemos dizer mesmo uma “concepção espontânea” (Posner *et al.*, 1982). A questão a ser resolvida, segundo Bruno, é como conciliar esta imagem com a natureza ondulatória das entidades microscópicas. Devido ao fato de a imagem corpuscular clássica ser tão forte no aluno que inicia seu estudo de mecânica quântica, talvez seja recomendável apresentar o dualismo realista (seção 2) como primeira interpretação para este aluno, apesar das limitações que uma versão ingênua desta interpretação possui (por “versão ingênua” entendemos a versão para uma única partícula, que não tem os problemas da “não-localidade”).

### 13. Conclusões

Neste trabalho, partimos de uma classificação das “interpretações oficiais” da teoria quântica em quatro grandes grupos, e transpusemos este esquema para classificar as interpretações privadas dos alunos do curso de Mecânica Quântica. Tal esquema mostrou-se um instrumento útil para estudarmos tais interpretações privadas, por meio de questionários com respostas “abertas”, respostas “fechadas” e algumas entrevistas com alunos. Procuramos encaixar as respostas nas diferentes interpretações, sem com isso ter a ilusão de que as visões dos alunos pudessem ser reduzidas a categorias estanques. Fizemos também um estudo de correlações para verificar se os alunos usavam as mesmas interpretações em diferentes situações. Pudemos encontrar também alguns erros comuns feitos por parte dos alunos. De nossa parte, cometemos também alguns erros na formulação das perguntas, o que não impediu que chegássemos a algumas conclusões, que resumimos a seguir.

1) *Contradições*. O conhecimento que um aluno tem de uma área de Física não é perfeitamente integrado em sua mente. Às vezes, para um mesmo problema, isso o leva a enunciar uma frase e logo em seguida se contradizer (seção 4).

2) *Troca de interpretações privadas*. Ligado ao ponto anterior, um aluno pode utilizar representações internas (*scripts*) distintas, ou interpretações privadas distintas e até contraditórias, para analisar problemas diferentes. Verificamos que o *script* interpretativo usado quando o aluno pensa no princípio de incerteza é muitas vezes diferente daquele usado quando pensa sobre os estados quânticos no aparelho de Stern-Gerlach ou na dupla fenda (seção 8). (Ver porém o item 5, adiante.)

3) *Ambigüidades em questionários abertos*. Questionários com perguntas abertas são bastante reveladores com relação aos processos cognitivos dos alunos. No entanto, eles permitem

que o aluno se exprima de maneira ambígua, de forma a ocultar suas dúvidas e ignorâncias. Os questionários fechados resolvem este problema obrigando o aluno a tomar decisões, mas muitas vezes o aluno simplesmente “entende errado” a pergunta (especialmente quando mal formulada), o que limita de certa forma esta abordagem.

4) *Defesa da interpretação oficial ≠ uso de interpretações privadas.* Há uma diferença grande entre defender explicitamente ou oficialmente uma interpretação, por um lado, e utilizá-la implicitamente ou privadamente para compreender um problema de Física Quântica, de outro. Ao passo que a maioria dos alunos defendeu “oficialmente” a interpretação ortodoxa, com relação à questão sobre o aparelho de Stern-Gerlach (seção 5) apenas 20% adotaram implicitamente a postura ortodoxa, sendo que 40% se aliaram à visão ondulatória, 30% à interpretação dualista realista e 10% à corpuscular. Esta discrepância revela que a questão das interpretações da teoria não é bem trabalhada nos cursos usuais de Mecânica Quântica.

5) *Correlação entre interpretações para diferentes problemas.* Ao investigarmos se as interpretações privadas utilizadas em diferentes problemas são as mesmas ou não, encontramos uma razoável correlação positiva (seção 6), ou seja, em muitos casos o aluno utilizou a mesma interpretação privada em dois problemas diferentes, apesar de haver muitas exceções que corroboram também o item 2.

6) *Conceitos hegemônicos.* Algumas palavras como “dualidade” ou “probabilidade” invocam um conceito muito forte na mente do aluno, fazendo-o desprezar os *scripts* interpretativos que utilizaria para responder uma pergunta de múltipla escolha.

7) *Erros conceituais em cursos excessivamente matemáticos.* Talvez o experimento paradigmático mais importante a ser passado para os alunos de Estrutura da Matéria e de Mecânica Quântica seja o da dupla fenda para elétrons individuais. Apesar disso, aproximadamente metade dos alunos responderam erroneamente as questões envolvendo este ponto (seção 4). Isso confirma o nosso sentimento de que os cursos de Mecânica Quântica são excessivamente voltados para cálculos, dando pouca ênfase ao esclarecimento conceitual do assunto (o problema não seria apresentar a matemática, mas negligenciar os conceitos e as questões interpretativas).

8) *Menosprezo da teoria da medição.* Nos cursos de Mecânica Quântica, há uma certa negligência em se analisar adequadamente o processo de medição, incluindo aí um dos princípios básicos da teoria, o Postulado da Projeção, que descreve o colapso da função de onda (seção 11).

9) *Interpretação do princípio de incerteza.* A interpretação corpuscular estatística do princípio de incerteza não é muito difundida entre os alunos de Mecânica Quântica (pelo menos os das turmas examinadas na USP e UFPR), apesar de o ser entre muitos professores e alunos de pós-graduação de Física Matemática (seção 9).

10) *Questões discursivas vs. questões imagéticas.* A maneira como uma pergunta é feita influencia bastante a escolha interpretativa do aluno. Isso inclui também se a pergunta ressalta aspectos imagéticos ou discursivos. Com relação às questões sobre retrodição, apenas 3% aceitaram em um enunciado discursivo, ao passo que a introdução de imagens (de trajetórias ou de ondas) elevou esta aceitação para em torno de 30% (seção 10).

11) *Interpretação oficial vs. imagens.* Especialmente nas entrevistas, constatamos que os alunos sentem a necessidade de “imaginar” o mundo físico no nível quântico. Os elétrons são vistos como “bolinhas”, embora possam estar “dissolvidos na eletrosfera”. Estas visões podem ser

consistentes com visões realistas, mas afrontam a interpretação oficial ortodoxa, notoriamente positivista, que em geral também é aceita pelos alunos.

Fica aqui a impressão de que a contribuição maior deste trabalho, se é que o há, está não no fechamento, mas na abertura de questões.

## **Bibliografia**

BALLENTINE, L.E. The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics, *Reviews of Modern Physics*, v. 42, p. 358-81, 1970.

BOHM, D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in terms of “Hidden” Variables, I and II, *Physical Review*, v. 85, p. 166-93, 1952.

BOHR, N. O Postulado Quântico e o Recente Desenvolvimento da Teoria Atômica, in PESSOA JR., O. (org.), *Fundamentos da Física 1 – Simpósio David Bohm*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, p. 135-59, 2000. Original de 1928, republicado em BOHR, N., *Atomic Theory and the Description of Nature*. Cambridge: Cambridge University Press, p. 52-91, 1934.

COHEN-TANNOUJDI, C., DIU, B., LALOË, F. *Quantum Mechanics*. Nova Iorque: Wiley, 1977. Original em francês: *Mécanique Quantique*. Paris: Hermann, 1973.

GARDNER, H. *A Nova Ciência da Mente*, São Paulo: EDUSP, 1995. Original: *The Mind’s New Science*. Nova Iorque: Basic Books, 1987.

GHIRARDI, G.C., RIMINI, A., WEBER, T. Unified Dynamics for Microscopic and Macroscopic Systems, *Physical Review D*, v. 34, p. 470-91, 1986.

GRECA, I.M., MOREIRA, M.A. Uma Revisão da Literatura sobre Estudos Relativos ao Ensino da Mecânica Quântica Introdutória. *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 6, n. 1, 2000.

HERBERT, N. *A Realidade Quântica*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989. Original: *Quantum Reality*, 1985.

JAMMER, M. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. Nova Iorque: Wiley, 1974.

MONTENEGRO, R.L. *Interpretações da Mecânica Quântica e as Concepções dos Alunos do Curso de Física*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

OMNÈS, R. Consistent Interpretations of Quantum Mechanics, *Reviews of Modern Physics*, v. 64, p. 339-82, 1992.

PESSOA JR., O. Interferometria, Interpretação e Intuição: Uma Introdução Conceitual à Física Quântica, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.19, n. 1, p. 27-48, 1997.

——— As Interpretações da Física Quântica, in AGUILERA-NAVARRO, M.C.K., AGUILERA-NAVARRO, V.C., GOTO, M. (orgs.) *Anais III Semana da Física*. Londrina: Editora

da Universidade Estadual de Londrina, p. 137-87, 1998.

————— “Complementing the Principle of Complementarity”, *Physics Essays*, v. 13, p. 50-67, 2000.

————— *Conceitos de Física Quântica*, a sair. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2002.

POSNER, G.J., STRIKE, K.A., HEWSON, P.W., GERTZOG, W.A. Accomodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change, *Science Education*, v. 66, p. 211-27, 1982.

SOLVAY, INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Discussão Geral das Novas Idéias Formuladas, in PESSOA JR., O. (org.) *Fundamentos da Física 2 – Simpósio David Bohm*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2001, p. 139-72. Original em francês: Discussion Générale des Idées Nouvelles Émises, in *Électrons et Photons - Rapports et Discussions de Cinquième Conseil de Physique*. Paris: Gauthier-Villars, 1928, p. 248-89.

STILLINGS, N.A., FEINSTEIN, M.H., GARFIELD, J.L. (orgs.) *Cognitive Science: An Introduction*. 2<sup>a</sup> ed. Cambridge: MIT Press, 1995.

ZEH, H.D. There are no Quantum Jumps, nor are there Particles! *Physics Letters A*, v. 172, p. 189-92, 1993.

## Notas

(1) A tese de doutorado Montenegro (2000) recebeu financiamento da Fapesp, o qual agradecemos. Gostaríamos também de agradecer as sugestões de José Luciano Duarte e Jesuína Pacca, além dos valiosos comentários dos árbitros anônimos deste artigo, e aos professores e alunos que colaboraram com o projeto. ([Volta para o texto](#))

(2) Uma brevíssima introdução à distinção entre dois tipos de representação mental, proposicional e imagética, é apresentada em Montenegro (2000), cap. 4. Sobre *scripts*, uma forma de representação proposicional, ver Stillings *et al.* (1995), cap. 2. Sobre a imagética, e a controvérsia envolvendo seu estatuto, ver Gardner (1995), seção III.2. ([Volta para o texto](#))

(3) Para medir a correlação entre as respostas  $a_1$  e  $b_2$ , dadas respectivamente para as perguntas  $A$  e  $B$ , utilizamos um coeficiente que mede o grau de dependência estatística entre estes eventos:  $c_D = p(a_1 b_2) / [p(a_1) \cdot p(b_2)]$  (ver Montenegro, 2000, seção 5.3.1). Nesta expressão, a probabilidade  $p(a_1)$  é medida pelo número de alunos que escolheu a resposta  $a_1$  dividido pelo número total de alunos que respondeu a pergunta  $A$ ; analogamente para  $p(b_2)$ . A probabilidade conjunta  $p(a_1 b_2)$  é medida pelo número de alunos que escolheu as respostas  $a_1$  e  $b_2$ , sobre o número total de alunos que respondeu as duas perguntas,  $A$  e  $B$ . Se  $c_D > 1$ , há dependência positiva entre os eventos (correlação positiva); se  $c_D < 1$ , a correlação é negativa (ou seja, há dependência estatística positiva entre  $a_1$  e a negação de  $b_2$ ); e se  $c_D = 1$ , os eventos são estatisticamente independentes (ausência de correlação). ([Volta para o texto](#))