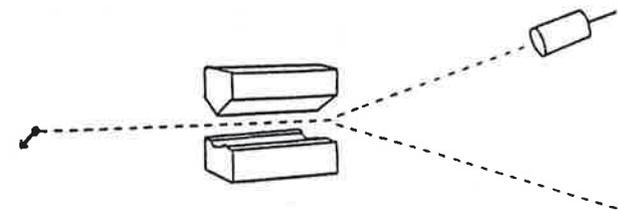


Ondas e Quântica: **Introdução Conceitual à Física Quântica**

Notas de Aula de um curso de 30
horas dado na Estação Ciência, São
Paulo, de 24/02 a 30/03 de 1996.

Oswaldo Pessoa Jr.



Curso ministrado
com Maria Beatriz
Fagundes

Sumário

Fonte das Figuras Apresentação

Cap. I - Introdução Histórica

1. Apresentação 1
2. A Velha Teoria Quântica 1
3. Paradoxos Onda-Partícula 4
4. A Mecânica Matricial 6
5. A Mecânica Ondulatória 7

Cap. II - Dualidade Onda-Partícula

1. A Essência da Física Quântica 11
2. Partículas e Ondas 11
3. Aspecto Ondulatório da Luz 12
4. Aspecto Corpuscular da Luz 14
5. Dualidade Onda-Partícula: versão fraca 17

Cap. III - Ondas em Uma Dimensão

1. Introdução às Ondas 21
2. Amplitude, Fase, Intensidade 22
3. Superposição de Ondas 24
4. Reflexão e Ondas Estacionárias 26
5. Divisão de Ondas 29

Cap. IV - Interferômetro de Mach-Zehnder

1. Interferômetro de Mach-Zehnder Clássico 31
2. Interferometria para Um Fóton 34
3. Por Qual Caminho Rumou o Fóton? 34
4. Princípio de Superposição para Estados Quânticos 35
5. Variando a Fase de um Componente no Interferômetro 37

Cap. V - "Fenômenos" Corpuscular e Ondulatório	
1. Experimento de Anti-Correlação	39
2. "Fenômeno" Corpuscular	40
3. Dualidade Onda-Partícula: versão forte	41
4. Fenômenos Intermediários	42
5. Medições de Trajetória em Fenômenos Ondulatórios	42
6. Experimento de Escolha Demorada	44
Cap. VI - Colapso ou Redução de Estado	
1. Probabilidade	47
2. O Experimento de Stern-Gerlach	47
3. Aparelhos de Stern-Gerlach em Sucessão	49
4. Exemplo do Cálculo Quântico de Probabilidades	50
5. Exemplo de Redução de Estado	50
6. Recombinação de Feixes	51
7. O Que é Responsável pelo Colapso?	52
8. Subjetivismo e o Paradoxo do Gato	53
9. Interpretações do Estado Quântico	54
Cap. VII - Ondas em 2 e 3 Dimensões	
1. Introdução às Ondas em 2 e 3 Dimensões	57
2. Reflexão e Refração	58
3. Difração e Interferência Luminosa	60
4. Difração e Interferência para Elétrons	63
5. Reflexão Interna Total Frustrada e Tunelamento Quântico	65
Cap. VIII - Explorando a Interferometria Quântica	
1. Polarização	67
2. Interferometria com Polarizadores	69
3. Interferômetro com Pá Giratória	69
4. Experimento de Duas Fendas Revisitado	71

Cap. IX - Princípio de Incerteza	
1. O Pacote de Onda	73
2. Princípio de Indeterminação na Física Ondulatória	75
3. Princípio Quântico de Indeterminação	77
4. O Argumento Original de Heisenberg	79
Cap. X - O Átomo	
1. Ondas Estacionárias no Átomo	83
2. Corda Vibrante e Potenciais Quânticos	85
3. A Equação de Schrödinger	88
4. Medições Repetidas em um Átomo	89
5. A Energia do Átomo é sempre Discreta?	91
Cap. XI - Fundamentos da Física Quântica: um Histórico	
1. A Interpretação da Complementaridade	93
2. Discussões nos Congressos de Solvay	94
3. As Provas de von Neumann	95
4. O Paradoxo de EPR	96
5. Teorias de Variáveis Ocultas	98
6. A Desigualdade de Bell	99

Fonte das Figuras

- BOHM, D., *Quantum Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (EUA), 1951. Fig. VI.5 (p. 605).
- EISBERG, R. & RESNICK, R., *Física Quântica*, Campus, Rio de Janeiro, 1979. Figs. I.1 (p. 32), I.2 (p. 496), I.3 (p. 128, modificado), I.4 (p. 141), I.7 (p. 53), I.8 (p. 63), I.9 (p. 103, modificado), I.10 (p. 99), VII.17 (p. 260), IX.1 (p. 107), X.1 (p. 144), X.2 (p. 155).
- GREENBERGER, D.M., *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory*, Annals of the N.Y. Academy of Sciences, 480, 1986. Fig. IV.7 (p. 105).
- FEYNMAN, R.P.; LEIGHTON, R.B. & SANDS, M., *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, 1965. Fig. VIII.8 (v. III, p. 3-5).
- GASIOROWICZ, S., *Física Quântica*, Guanabara Dois, 1979. Fig. X.6 (p. 96).
- HALLIDAY, D. & RESNICK, R., *Physics*, Wiley, NY, 1960. Fig. VII.7 (p. 875).
- HECHT, E., *Óptica*, C. Gulbenkian, Lisboa, 1991. Fig. VII.10 (p. 424), VII.12 (p. 433), VIII.1 (p. 291), VIII.3 (p. 284).
- HEY, T. & WALTERS, P., *The Quantum Universe*, Cambridge U. Press, 1987. Figs. I.1 (p. 17), I.2 (p. 123), I.4 (p. 39), I.5 (p. 5), I.12 (p. 31), II.6 (p. 12).
- KURSUÑOGLU, B.N. & WIGNER, E.P., *Paul A. M. Dirac*, Cambridge U. Press. Fig. I.11 (p. 133).
- MEHRA, J., *The Solvay Conferences on Physics*. Reidel, 1975. Fig. I.6 (p. 114).
- NEWTON, R.E.I., *Wave Physics*, Arnold, Londres, 1990. Fig. II.1 (p. 165), II.2 (p. 184), III.3 (p. 53), III.5 e 6 (p. 76), III.7 e 8 (p. 79), III.11 (p. 78), III.12 (p. 87), VII.1 e 2 (p. 57), VII.3 (p. 59-60), VII.8 (p. 58), VII.11 (p. 247), VII.13 (p. 289), VII.14 (p. 290), VII.15 (p. 291).
- PSSC (PHYSICAL SCIENCE STUDY COMMITTEE), *Física, Parte II: Óptica e Ondas, Parte IV: Eletricidade e Estrutura Atômica*, Edart, São Paulo, 1971 (orig. 1960). Figs. II.1 (II, p. 128), II.3 (IV, p. 147), II.4 (IV, p. 181), II.7 (IV, p. 179), III.1 (II, p. 85), III.5 (II, p. 87), III.6 (II, p. 88), III.9 (II, p. 90), III.10 (II, p. 93), III.13 (IV, p. 218), III.14 (II, p. 91), VII.1 e 2 (II, p. 100), VII.4 (IV, p. 221), VII.5 (II, p. 101), VII.6 (II, p. 102), VII.9 (II, p. 112), VII.16 (II), X.3.
- RAE, A.I.M., *Quantum Physics: Illusion or Reality?*, Cambridge U. Press, 1986. Fig. VI.7 (p. 60).
- SEGRÈ, E., *From X-Rays to Quarks*, Freeman, S.F., 1980. Figs. I.3 (p. 52), I.4 (p. 120), I.7 (p. 44), I.8 (p. 99), I.9 (p. 150), I.10 (p. 154), I.13 (p. 157).
- TIPLER, P.A., *Física - para cientistas e engenheiros*, Guanabara Koogan, Rio, 1994. Figs. X.5 (p. 126), X.6 (p. 126).
- ULAM, S.M., *Adventures of a Mathematician*, Scribners, Nova Iorque. Fig. I.14 (p. 138ff).

Apresentação

Esta são as Notas de Aula de um Curso de Atualização dirigida para professores de 2º grau, realizada na Estação Ciência, São Paulo, nas manhãs de sábado entre 24/02 e 30/03 de 1996.

O curso é uma introdução à Mecânica Quântica, a teoria física gera desenvolvida a partir de 1925 para explicar o mundo dos átomos e da radiação. Sem entrar nos detalhes matemáticos, estudamos alguns experimentos recentes a partir dos quais é possível entender os aspectos fundamentais desta revolucionária teoria. Paralelamente a este treinamento de intuição, consideramos algumas questões filosóficas e a existência de várias interpretações diferentes para o mesmo formalismo.

As notas foram escritas às pressas, à medida que o curso se desenrolava, e assim apresentam algumas falhas (como na Fig. VII.17). Espero corrigi-las numa nova versão das notas, que deverão se transformar num livrinho paradidático. Um capítulo que terá que ser adicionado é uma breve revisão da Física Clássica de Partículas, salientando as noções de energia e momento, e os gráficos de energia potencial.

O curso foi ministrado juntamente com Maria Beatriz Fagundes, aluna de Mestrado em Ensino de Ciências (modalidade Física) da USP, com quem elaborei as demonstrações práticas e que vem colaborando na leitura crítica das notas. O curso só se realizou devido ao estímulo direto do Diretor da Estação Ciência, prof. Ernst Hamburger. Devo agradecer também a incentivo dos profs. Amélia Império-Hamburger e Mikiya Muramatsu, ambos do Depto. de Física Geral do IFUSP, que co-patrocinau este curso. Auxílio financeiro para o autor foi fornecido pelo CNPq e pela Estação Ciência.

Agradeço também à Cida Siqueira, da Estação Ciência, e ao Paulo Cidemar, técnicos do laboratório de demonstrações, que nos ajudaram a montar as atividades práticas. Por fim, agradecemos o interesse e o apoio dos professores que assistiram nossas aulas: Vera Rubbioli, Ana Maria França, Carlos Kantor, Clayton de Sá, Sérgio Sato, Rosely Nakao, Eliane Rossi, Ros Condini, Ercília Silva, Evangélica Athanassopoulos, Thais Rocha, Dimas Aparecido, Lourival Carbinatti, Inês Variante, Flávio Alves, Carlos Albert Barbosa, Ivete Tamashiro, José Moura, Maria Cristina Tibério, Sílvio Minholi, Vera Maccagnano, Célio Kinjo, Nelson Pascholito, Ben Hur Carlet Francisco Moura, Maria Antonieta Iwano, Margarida Campos, Ana Cristina Borcadin, José Carlos Gomes, Luis Antonio Alcântara, Jorge Schossareck, Maria das Graças Dias, Roseli Spera, Elmar Rodrigues e Roberto Hosni.

Uglio (Andrina)
Gloria (Witens)

Capítulo I

23

Introdução Histórica

1. Apresentação

O primeiro indício de que a Mecânica Clássica é inadequada para tratar de domínios microscópicos foi obtido por Max Planck, em 1900. Um quarto de século depois, a chave para a nova teoria foi finalmente obtida, e a Mecânica Quântica se juntou à Teoria da Relatividade como as duas teorias fundamentais da Física Contemporânea.

Dada a importância dessas duas teorias revolucionárias, não dever-se-ia ensinar seus princípios na Escola de 2º Grau? É verdade que ensinar a fazer contas com estas teorias seria avançado demais, mas ensinar os *conceitos* destas teorias não seria plausível? Neste Curso de Extensão para professores de 2º Grau, argumentamos que tal proposta é viável, e exploramos uma possível abordagem conceitual ao ensino de Física Quântica, que dá ênfase à chamada Mecânica Ondulatória. Veremos que existem outras abordagens possíveis, e passaremos a compreender que esta pluralidade de interpretações possíveis está relacionada à própria natureza da Teoria Quântica.

Iniciaremos com um breve relato da história desta teoria, para considerar em seguida o que tomamos como a "essência" da Física Quântica: a dualidade onda-partícula.

2. A Velha Teoria Quântica

A Mecânica Quântica é a teoria física que descreve o mundo dos átomos e da radiação, tendo sido estabelecida de forma mais ou menos definitiva em torno de 1926. Seus primórdios, porém, datam de 1900, com uma descoberta surpreendente feita por Max Planck (de Berlim) de que *os corpos emitem e absorvem luz em quantidades discretas de energia*, e não de forma contínua.

Este era um resultado teórico, necessário para explicar os novos dados experimentais concernentes às cores da luz emitida por corpos incandescentes (por exemplo, uma barra de ferro aquecida torna-se vermelha), obtidos em Berlim por Otto Lummer & E. Pringsheim em 1899. Imaginando que cada

átomo em um corpo oscila com uma frequência ν , Planck foi obrigado a postular que a energia desta oscilação é um múltiplo inteiro de uma quantidade discreta ϵ , dada por:

$$\epsilon = h\nu, \quad (I.1)$$

onde h é hoje conhecida como a “constante de Planck” (Fig. I.1).

Esta quantidade indivisível de energia ϵ , totalmente estranha à Física Clássica, seria conhecida como um “quantum” (ou pacote) de energia, donde se derivou a expressão “Física Quântica” para a nova teoria que iria surgir. Porém, como o resultado de Planck era tortuoso e indireto, ninguém se convenceu de que o postulado quântico era realmente importante.

O primeiro a levar a sério o resultado de Planck foi o jovem Albert Einstein, trabalhando em Berna, na Suíça, em 1905. Planck havia postulado que os átomos que absorvem ou emitem luz têm energia discretizada; Einstein postulou que a própria luz era discreta, sendo composta de “quanta de luz” (mais tarde chamados de “fótons”). A energia de cada fóton seria proporcional à frequência da luz, segundo a eq.(I.1).

Usando esta idéia, Einstein derivou uma lei para o “efeito fotoelétrico”, ou seja, como que a incidência de luz é capaz de gerar uma corrente elétrica em um metal. Como esta lei só seria confirmada em 1916, com os trabalhos experimentais do norte-americano Robert Millikan, este trabalho de Einstein só seria levado a sério depois da 1ª Guerra Mundial.

Em 1907, Einstein novamente usou o postulado de Planck, desta vez para explicar os dados experimentais que existiam na época sobre o comportamento térmico de corpos a baixas temperaturas. Dado o sucesso de suas previsões, outros cientistas como o químico Walther Nernst começaram a levar a sério o postulado quântico de Planck (Fig. I.2).

A conversão da comunidade científica se deu a partir do trabalho do jovem dinamarquês Niels Bohr, trabalhando em Manchester com o neozelandês Ernest Rutherford. Em 1910, Rutherford e Hans Geiger descobriram que o átomo tinha um núcleo duro, ao contrário da opinião majoritária (Fig. I.3). Bohr então resolveu aplicar as idéias de Planck para este modelo atômico, e em 1913 conseguiu explicar as cores das linhas espectrais emitidas pelo átomo de hidrogênio.

Em seu modelo, os elétrons que circundam o núcleo só podem ocupar certos níveis energéticos discretos. Quando um elétron passa de um nível mais energético para um menos energético, ele emite um quantum de luz com a diferença de energia correspondente a este salto (Fig. I.4).

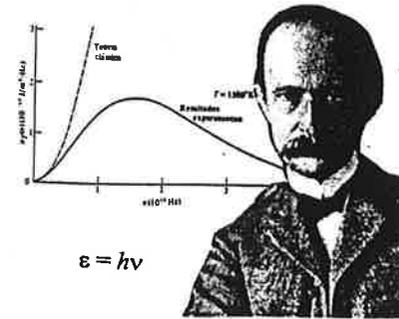


Figura I.1: Max Planck (1858-1947). A previsão clássica de Rayleigh (pontilhado), em comparação com a lei de Planck, que fornece a energia emitida para cada frequência de luz.

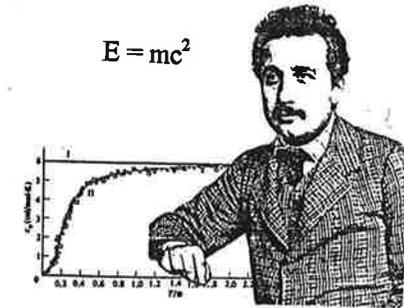


Figura I.2: Albert Einstein (1897-1955). A previsão clássica de Dulong-Petit (I) em comparação com as previsões de Einstein (II) para o calor específico a baixas temperaturas.

A partir daí, a Teoria Quântica se estabeleceu, mas ela tinha um monte de lacunas, e ninguém estava satisfeito com ela. Após a Guerra, duas linhas de pesquisa independentes levariam a uma reformulação da “Velha” Teoria Quântica, estabelecendo a “Mecânica Quântica”. Antes de descrever estas duas correntes, porém, examinemos o problema da natureza da radiação, que assolava a Física no começo do século.

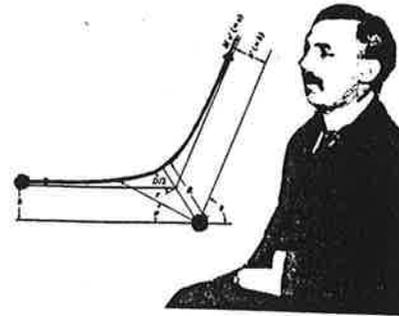


Figura I.3: Ernest Rutherford (1871-1937). A maneira com que partículas alfa interagem com um átomo, seguindo trajetórias parabólicas, indicou que o átomo contém um núcleo pesado.

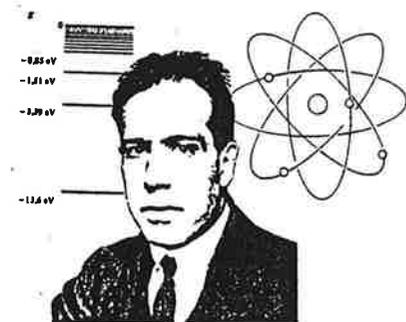


Figura I.4: Niels Bohr (1885-1962). Postulou que os elétrons de um átomo se mantêm em níveis de energia discretos. Os níveis representados correspondem ao átomo de hidrogênio.

3. Paradoxos Onda-Partícula

O ano de 1896 havia sido um marco na história da Física experimental, com as descobertas do raio X, da radioatividade e das propriedades corpusculares do elétron. Mas o que seria o raio X? A primeira hipótese era de que o raio X é um “impulso eletromagnético”, o que indicava que ele tinha uma natureza semelhante à da luz, só que com mais energia. Desde os trabalhos teóricos de James Maxwell, em 1870, e da detecção experimental de ondas de rádio por Heinrich Hertz, em 1888, sabia-se que ondas de rádio, radiação de calor e luz visível eram manifestação de uma mesma coisa, *ondas eletromagnéticas*, que se manifestavam de diferentes formas conforme o comprimento da onda (veremos mais sobre isso na seção III.4). O raio X parecia, assim, ser uma radiação eletromagnética de comprimento de onda curtíssimo, concentrado em um pulso. E a radiação que emanava de substâncias radioativas, que viria a se chamar de raio gama? Qual a sua natureza? A pesquisa indicava que raios X e raios gama tinham natureza semelhante.

No entanto, quando esses dois tipos de radiação interagiam com gases, ionizando o gás (ou seja, separando a carga negativa da molécula gasosa da carga positiva), coisas muito estranhas aconteciam. Dois paradoxos foram identificados, sendo hoje conhecidos como paradoxos da “quantidade” e da “qualidade”. O paradoxo da quantidade foi identificado pelo inglês J.J. Thomson em 1897. Ele percebeu que o raio X ionizava apenas uma parcela ínfima das moléculas do gás. Ora, se o raio X fosse uma onda, espalhada uniformemente pelo espaço, ele não deveria ionizar todas as moléculas de forma mais ou menos igual? Será que o raio X é uma partícula? (Fig. I.5)

Em 1906, além de se deparar com este mesmo problema, William H. Bragg, também encontrou o paradoxo da qualidade. A energia que uma molécula gasosa absorvia durante a ionização era quase igual à energia do impulso como um todo. Mas a onda está espalhada no espaço! Como que uma molécula consegue absorver toda esta energia? (Fig. I.6)

Em vista desses paradoxos, além do modelo corpuscular da luz formulado por Einstein (1905), interpretações corpusculares para o raio X foram sugeridas por Bragg (1907) e pelo alemão J. Stark (1909). Bragg, de fato, foi o primeiro a defender explicitamente, de maneira qualitativa, que a radiação tinha tanto uma natureza corpuscular quanto ondulatória. Tais modelos, porém, não conseguiam explicar o fenômeno de “interferência” (veremos mais tarde o que é isso) para raios X, observado em 1912 por Friedrich, Knipping & Laue. Assim, o consenso passou a ser que raios X são ondas eletromagnéticas, como a luz, e não partículas.

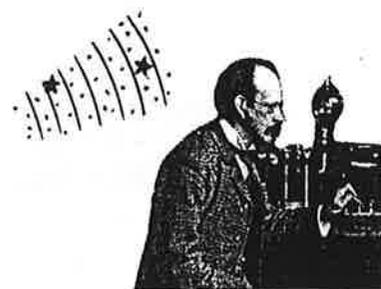


Figura I.5. Joseph J. Thomson (1856-1940). Investigando os efeitos do raio X, deparou-se com o estranho fato de que as ionizações (★) ocorriam para apenas algumas das moléculas do gás.

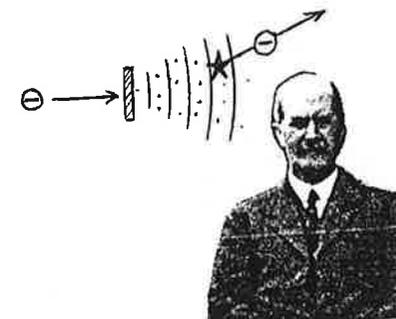
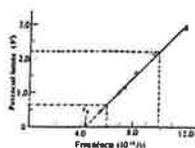


Figura I.6. William H. Bragg (1862-1942). Observou que a energia (⊖) de uma onda de raio X era absorvida integralmente pela molécula ionizada.

A maré começou a reverter quando Millikan (1916), para sua própria surpresa, confirmou a lei de Einstein para o efeito fotoelétrico (Fig. I.7). Em 1921, o físico amador parisiense Maurice de Broglie demonstrou o efeito fotoelétrico para o raio X, o que só podia ser explicado supondo que o raio X é constituído de partículas. E por fim, o norte-americano Arthur Compton (1923) realizou um experimento de espalhamento com raios-X que só podia ser explicado supondo que o raio-X se chocava como uma partícula em elétrons da amostra. Luz e raio X se comportam tanto como onda quanto como partícula, mas como explicar isso? (Fig. I.8)

O primeiro tratamento teórico dessa dualidade onda-partícula foi apresentado por Louis de Broglie, irmão mais novo de Maurice, que lhe ensinara que o raio X se comporta tanto como onda quanto como partícula. Louis foi mais longe, porém, estendendo a dualidade para toda a matéria, em 1923 (Fig. I.9). Usando a terminologia de de Broglie, toda partícula ou forma de radiação se reduz a um móvel com uma onda associada. Previu assim que seria possível observar fenômenos ondulatórios para o elétron, como logo se confirmaria. O comprimento de onda para uma partícula ou corpo de momento p (para partículas com massa, $p=mV$) seria dado por:

$$\lambda = h/p \quad (I.2)$$



$$eV = h\nu - W$$

Figura 1.7. Robert Millikan (1868-1953). Investigando o efeito fotoelétrico, mostrou que a energia dos elétrons liberados em um metal é proporcional à frequência da luz incidente.

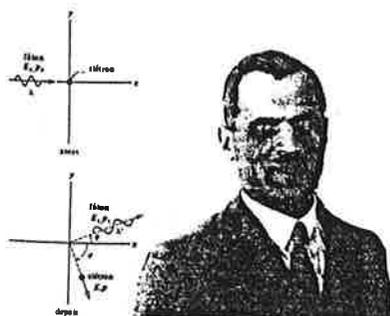


Figura 1.8. Arthur Compton (1892-1962). Para explicar como o raio X se espalha ao atravessar um filme metálico, precisou postular que o raio X consiste de partículas (fótons).

4. A Mecânica Matricial

Em 1923, tinha-se uma Teoria Quântica que era insatisfatória e vários resultados experimentais requerendo explicação. Mencionamos que duas tradições levariam simultaneamente à nova Mecânica Quântica. A primeira linha de pesquisa envolvia os jovens Werner Heisenberg e Wolfgang Pauli, que interagiam com os professores Max Born (de Göttingen, na Alemanha), Bohr (em Copenhague) e com o holandês Hendrik Kramers (que colaborava com Bohr). O que inspirava esta abordagem era uma atitude *positivista* de se recusar a falar de quantidades não-observáveis: por exemplo, a posição de um elétron no átomo não era observável, portanto a nova teoria não deveria tratar de posições, mas sim daquilo que era observável, como a frequência e intensidade da luz emitida pelo átomo. Abandonava-se a “visualização” propiciada por modelos, e manipulavam-se símbolos (especialmente Heisenberg) em busca de uma descrição matemática adequada aos dados experimentais.

Esta trilha resultou na descoberta, em junho de 1925, da “chave” para se entender a nova Mecânica Quântica: as quantidades relevantes não comutam, ou seja, o produto $a \cdot b$ pode ser diferente de $b \cdot a$. Born percebeu que essas quantidades se comportavam matematicamente como elementos de “matrizes”, e dessa maneira lançou, com o matemático Pascual Jordan (set. 1925), as bases da Mecânica Matricial.

O trabalho de Heisenberg fora lido na Inglaterra por Paul Dirac, que rapidamente estabeleceu o elo de ligação entre a Mecânica Clássica e a Quântica, utilizando um formalismo “algébrico” que incorporava vários resultados da teoria clássica. Quando publicou seu trabalho em novembro de 1925, parecia que havia duas novas teorias quânticas, a matricial e a algébrica (Figs. I.10, I.11).

5. A Mecânica Ondulatória

Os físicos mal tiveram tempo para digerir as novidades quando o austríaco Erwin Schrödinger, trabalhando em Zurique (na Suíça), publicou em janeiro de 1926 uma nova versão da teoria, a Mecânica Ondulatória, com a qual era muito mais fácil fazer cálculos. Havia então três teorias quânticas! Qual era a melhor? Logo se provaria que as três eram equivalentes.

A tradição na qual se colocava Schrödinger, ao contrário do positivismo de Heisenberg, etc., se prendia fortemente a modelos visualizáveis, associados à Física Ondulatória Clássica. O ponto de partida desta tradição foi o trabalho de Louis de Broglie, que alguns físicos tentaram desenvolver para chegar à nova Teoria Quântica. A idéia era usar os importantes trabalhos do matemático irlandês William Hamilton, que na década de 1830 buscara encontrar uma lei única que regesse tanto a propagação de luz quanto

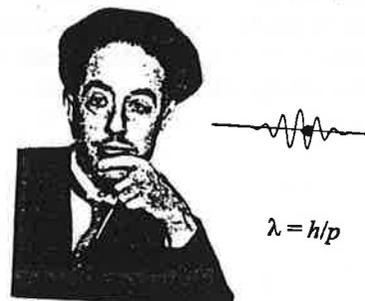


Figura 1.9. Louis de Broglie (1892-1987). Enunciou de maneira clara a dualidade onda-partícula, na forma de um “móvel” com uma onda associada.

$$\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$$



Figura 1.10. Werner Heisenberg (1901-1976). Além de descobrir a chave da Mecânica Quântica, enunciou as relações de incerteza a partir do estudo de um “microscópio de raio gama”.

o movimento das partículas, e que tivera algum sucesso com uma certa "analogia óptico-mecânica". Dentre esses físicos foi justamente Schrödinger que conseguiu generalizar a teoria de de Broglie, descrevendo o átomo de hidrogênio e obtendo uma equação de onda para uma certa grandeza Ψ , chamada "função de onda" (Fig. I.12).

A maneira como Schrödinger apresentou sua teoria visualizava o átomo, por exemplo, como possuindo uma onda de elétrons que se espalhava em torno do núcleo, com uma carga elétrica distribuída de forma contínua no espaço. Esta postura é, hoje em dia, chamada de *realista*, pois ela postula que existe uma realidade não-observável por trás das aparências, ao contrário do que supõe o positivismo, que só atribui realidade àquilo que é diretamente observado.

Apesar de seu formalismo adquirir enorme sucesso, a concepção de realidade (ou "ontologia") apresentada por Schrödinger não se sustentou, pois a idéia de que a carga do elétron pudesse ficar distribuída de forma contínua no espaço trazia certos problemas. O maior problema para a interpretação de Schrödinger era que a tal função de onda Ψ , para duas ou mais partículas, teria que ser definida em um espaço com mais de 3 dimensões!

A saída para este problema foi apresentada por Max Born, em junho de 1926, através de sua *regra probabilista*. A função de onda Ψ não seria um campo que existiria na realidade, mas estaria associada à *probabilidade* de se encontrar uma partícula nesta ou naquela posição. Mais especificamente, Ψ



$$xy - yx$$

$$\Downarrow$$

$$ih/2\pi \{x,y\}$$

$$\nabla^2 \Psi = (-8\pi^2 m/h^2) (E-V) \Psi$$



Figura I.11. Paul Dirac (1902-1984). Estabeleceu a ligação formal que existe entre as Mecânicas Clássica e Quântica.

Figura I.12. Erwin Schrödinger (1887-1961). Desenvolveu uma versão ondulatória para a Mecânica Quântica, a partir de sua célebre equação.

seria uma "amplitude" cujo quadrado $|\Psi|^2$ forneceria tal probabilidade (as barras são colocadas nesta expressão para o quadrado porque Ψ é uma função de números complexos) (Fig. I.13).

Outro resultado importante foi percebido por alguns físicos, e formalizado por Heisenberg, em março de 1927: as *relações de incerteza* (ou de indeterminação). Para certos pares de grandezas, como posição e velocidade de uma partícula, se a posição tiver um valor bem definido, a velocidade estará indeterminada; se a velocidade tiver um valor bem definido, a posição estará indeterminada.

Assim, a partir de 1927, a Mecânica Quântica já possuía todos seus ingredientes essenciais, tendo sido generalizada no final de 1926 à forma conhecida como "teoria da transformação", e mais tarde, em 1929, sendo apresentada pelo húngaro John von Neumann como uma teoria de vetores em um "espaço linear complexo" (Fig. I.14).

Examinaremos agora, em nosso curso, algumas dessas características da Mecânica Quântica, além de outras questões conceituais que irão surgindo à medida que nos familiarizarmos com o funcionamento da teoria.



$$|\Psi|^2 \rightarrow \text{prob.}$$



Figura I.13. Max Born (1887-1961). Interpretou o quadrado da função de onda como fornecendo a probabilidade de se detectar uma partícula.

Figura I.14. John von Neumann (1903-1957). Tornou a Mecânica Quântica mais rigorosa, definindo-a num "espaço linear complexo".

→ Poderia fazer um capítulo (n.º III) pequeno falando sobre as partículas clássicas. Salientaria a nos de momento energia, conversão de energia, (talvez aquele exercício de Joca de ~~bola~~ bola), e a descensão em termos de energia potencial, para tornar inteligível o tunelamento e peso quadrado finito!

Capítulo II

Dualidade Onda-Partícula

1. A Essência da Física Quântica

Qual é a “essência” da Física Quântica? Quais são os princípios gerais que caracterizam esta teoria, distinguindo-a de outras teorias? Naturalmente não existe uma resposta única a esta pergunta:

a) O nome “quântico” sugere que o essencial é a presença de quantidades *discretas*, como os “pacotes” de energia, ou de processos descontínuos.

b) Pode-se também argumentar que a maior novidade da teoria quântica é o papel que a *probabilidade* nela desempenha, descrevendo um mundo essencialmente “indeterminista”.

c) Alguns autores consideram que a essência da Física Quântica é o *princípio de incerteza*, segundo o qual a posição e a velocidade de uma partícula não podem mais ser definidas simultaneamente.

d) Outros, com espírito mais filosófico, salientam que o que esta teoria tem de fundamental é que o *observador* não pode ser separado do objeto que está sendo observado.

e) Aqueles com viés mais matemático afirmam que o essencial na Mecânica Quântica é o uso de grandezas que não comutam, ou o papel insubstituível desempenhado pelos números complexos.

Todas essas afirmações são corretas. No entanto, adotaremos como nosso ponto de partida a chamada “dualidade onda-partícula”, e tomaremos uma versão deste princípio como a essência da Física Quântica.

Em poucas palavras, o que caracteriza a teoria quântica de maneira essencial é que ela é a teoria que *atribui, para qualquer partícula individual, aspectos ondulatórios, e para qualquer forma de radiação, aspectos corpusculares*. Esclareçamos isso, para entender porque tal tese é uma contradição aos olhos da Física Clássica.

2. Partículas e Ondas

Para a Física Clássica, uma partícula pode ser imaginada como uma bolinha bem pequena que se locomove por aí, e que em condições normais não

se divide. Além dessa *indivisibilidade*, uma partícula também se caracteriza por estar sempre em uma posição bem definida, e com uma velocidade precisa. Com o passar do tempo, a partícula descreve uma *trajetória* bem definida, que pode ser concebida como uma curva no espaço.

Uma onda, por outro lado, é concebida pela Física Clássica como uma excitação que se propaga em um meio, como a superfície da água, e que tem a característica de se espalhar no espaço. Uma pedra que cai na água gera ondas circulares, que à medida que se expandem vão diminuindo de intensidade indefinidamente. O que se propaga com a onda é energia, que se identifica com o movimento oscilatório das partículas do meio. Como esse movimento das partículas pode ser tão tênue quanto se queira, podemos dizer que as ondas não possuem a característica de serem indivisíveis, mas que são *contínuas*, pelo menos em teoria. Além disso, estas ondas circulares claramente não descrevem uma "trajetória", do tipo definido para partículas. Elas são *espalhadas* no espaço, sem se localizar em um ponto bem definido.

Além de serem contínuas e espalhadas, as ondas exibem uma série de fenômenos típicos, como a *difração* e a *interferência*. Vejamos agora um experimento no qual surge um padrão de interferência, deixando para o próximo capítulo um exame mais detalhado da Física das Ondas.

3. Aspecto Ondulatório da Luz

O experimento de duas fendas foi realizado em 1801 pelo irlandês Thomas Young, e serviu como argumento decisivo para a concepção de que a luz é uma onda, ao contrário do que postulava Isaac Newton um século antes, que a concebia como consistindo de partículas. Nesse experimento, luz solar originando de um pequeno buraco em um primeiro anteparo passa por duas fendas paralelas em outro anteparo, e cai sobre uma tela. A imagem formada na tela consiste de uma série de regiões iluminadas separadas por regiões escuras (Fig. II.1).

Young mostrou que tal padrão de interferência poderia ser explicado supondo que a luz é uma onda (veremos maiores detalhes no capítulo seguinte). Padrões de interferência como esse podem ser considerados uma "assinatura" das ondas, ou seja, se realizarmos um experimento e observarmos um padrão deste tipo, podemos com boa segurança sustentar que o fenômeno observado é ondulatório.

O trabalho de Young acabou estimulando Augustin Fresnel, em Paris (1821), a ir contra a tradição corpuscular newtoniana e a elaborar uma teoria

ondulatória para a luz, que teve grande sucesso. Curiosamente, o argumento **decisivo** a favor da teoria ondulatória de Fresnel foi dada por um opositor a ele, **Siméon Poisson**. Este deduziu que a luz emitida por uma fonte pontual que passasse por um obstáculo circular exibiria uma sombra circular no centro da qual haveria um ponto luminoso (Fig. II.2). Isso parecia absurdo, mas Fresnel realizou tal experimento e de fato confirmou a existência do que ficou conhecido como "ponto de Poisson".

Estabeleceu-se que a luz é uma onda, sendo que a *intensidade* (ou potência, a energia por unidade de tempo) de um feixe de luz monocromático (ou seja, de uma única frequência) é dada pelo quadrado da amplitude da onda (veremos mais sobre isso no capítulo seguinte). Em 1870, Maxwell mostrou que esta onda corresponde a uma oscilação elétrica e magnética. Isso foi confirmado experimentalmente por Hertz, em 1888, que descobriu as ondas de rádio. Mencionamos na seção I.3 como aos poucos o raio X passou a também ser considerado uma forma de *onda eletromagnética*. Na Fig. II.3 mostra-se todo o espectro de radiação eletromagnética, onde cada forma difere das outras apenas pelo comprimento da onda (ou frequência), mantendo a mesma velocidade c no vácuo. Assim, as cores que distinguimos, por exemplo no espectro do arco-íris, se caracterizam justamente por possuir comprimentos de onda diferentes. (Há outros fatores que determinam as cores que vemos: por exemplo, a cor de uma mancha pode variar se as cores à sua volta se modificarem!)

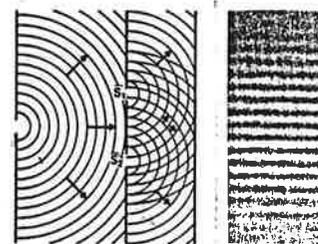


Figura II.1. A luz proveniente de uma fonte (*) passa por uma fenda, depois passa por duas fendas S_1 e S_2 . O que se observa em uma chapa fotográfica é um padrão de interferência, alternando regiões claras e escuras. Isso é fácil de explicar supondo que a luz é uma onda.



Figura II.2. Quando a luz proveniente de uma fonte pontual é bloqueada por um disco circular opaco e cai numa tela, forma-se nesta uma sombra circular envolta por anéis de difração, e possuindo um ponto luminoso em seu centro - o chamado "ponto de Poisson".

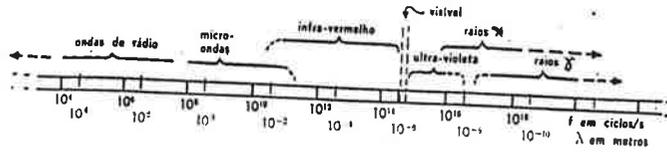


Figura II.3. O espectro de radiação eletromagnética. Com frequência maior do que a luz visível se encontra a radiação ultravioleta, o raio X e os raios gama. Com frequência menor (e comprimento de onda maior) se encontra o infravermelho, as micro-ondas e as ondas de rádio.

Agora, se a luz é uma onda, qual é o meio que oscila quando a luz passa? Nas ondas no mar, o que oscila são as moléculas de água, mas o que oscila no caso da luz? Não pode ser apenas moléculas, porque a luz se propaga também no vácuo. Os físicos do século XIX postularam então que haveria um “éter luminífero”, um meio tênue e invisível que sustentaria as ondas luminosas. Para Fresnel, tal éter seria de natureza mecânica, mas a partir de Maxwell o éter teria natureza eletromagnética. No entanto, todas as tentativas de detectar o éter fracassaram, sendo que a mais conhecida é o experimento de Michelson-Morley (1887). A partir da Teoria da Relatividade Restrita (Einstein, 1905), tal éter seria abandonado.

4. Aspecto Corpuscular da Luz

Mencionamos no Capítulo I que a noção introduzida por Einstein de que a luz possui uma natureza corpuscular passou a ser levada a sério depois do experimento de Millikan com o efeito fotoelétrico e o de Compton. Apesar de ser um pouco complicado, o efeito fotoelétrico continua sendo, talvez, o experimento mais simples mostrando como a luz se comporta como partícula, e como a “qualidade” (energia de uma partícula) difere da “quantidade” (número de partículas). Descreveremos agora alguns aspectos gerais deste experimento, sem entrar em detalhes.

O fenômeno que Millikan investigou é conhecido como “efeito fotoelétrico”, mas o termo mais preciso é “efeito fotoemissivo”, pois envolve a emissão de elétrons da superfície de metais devido à incidência de luz. Este efeito foi observado por Hertz em 1888, e investigado mais a fundo pelo húngaro-alemão Philipp Lenard, na passagem do século. A melhor maneira de observar este efeito é no vácuo, por meio de uma *fotocélula* (Fig. II.4). Uma

placa metálica (emissor) recebe luz de uma frequência pura (vermelho, verde, ultravioleta etc.), e esta luz faz com que os elétrons do metal sejam emitidos. Uma outra placa metálica (coletor) atrai os elétrons (devido a uma diferença de potencial positiva entre as placas).

Para entender este arranjo experimental, podemos considerar um modelo mecânico simples, a ser exibido em classe (Fig. II.5). Os elétrons, que se encontram presos ao metal, podem ser representados através de bolinhas pretas presas dentro de uma pequena cova. Esta cova está presa a um plano (à esquerda na figura) que pode ser inclinado para cima ou para baixo. Se uma bolinha receber uma certa quantidade de energia e sair da cova, indo para o plano, é sempre possível coletá-la em uma caixa inclinando-se o plano para baixo. Pode-se assim contar o número de bolinhas emitidas. No experimento real, o número de elétrons emitidos é inferido através de uma medição da corrente elétrica que passa no circuito existente entre as duas placas, quando a diferença de potencial entre o coletor e o emissor é positiva.

Agora, como medir a energia de cada bolinha emitida? Ora, basta inclinar o plano para cima, e observar se a bolinha consegue atingir a borda do plano e cair na caixa. No experimento real, isso corresponde a colocar uma diferença de potencial *negativa* entre coletor e emissor, e verificar se o elétron “cai” no coletor. Voltando ao modelo mecânico, se tivermos várias bolas sendo emitidas da cova, haverá uma inclinação do plano para a qual nenhuma bolinha consegue escalar o plano e cair na caixa. Esta inclinação indica o limiar máximo das energias das bolinhas emitidas, que no experimento real corresponde ao *potencial de corte*.

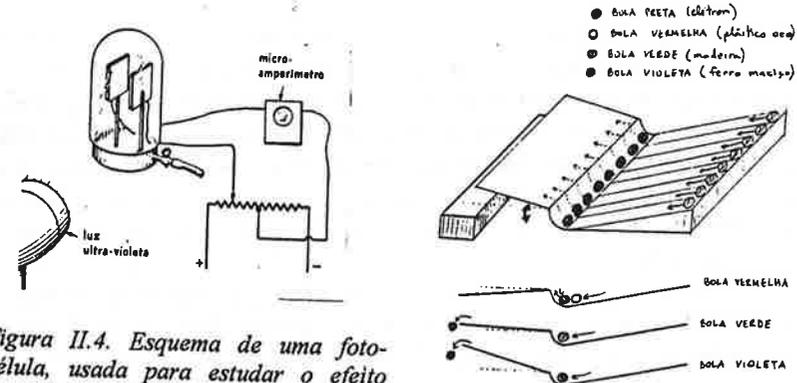


Figura II.4. Esquema de uma fotocélula, usada para estudar o efeito fotoelétrico. A diferença de potencial entre as placas pode ser ajustada, e a corrente entre elas medida.

Figura II.5. Modelo mecânico simples que representa o efeito fotoelétrico.

Então já aprendemos a medir a quantidade de elétrons emitidos, e a energia do elétron mais energético. O que acontece no efeito fotoelétrico? Pensando no modelo mecânico, temos a luz incidindo sobre as bolinhas na cova. Observa-se, sob certas condições, que a luz é capaz de fazer os elétrons serem emitidos. Mais detalhadamente, observam-se os seguintes fatos:

- (a) Qualquer que seja o metal do emissor, existe uma frequência (o "limiar") abaixo do qual não ocorre emissão de elétrons!
- (b) Para uma dada frequência de luz (acima do limiar), quanto maior a intensidade do feixe, maior é o número de elétrons emitidos!
- (c) Para feixes contendo o mesmo número de fótons mas possuindo diferentes frequências (que estejam bem acima do limiar), o número de elétrons emitidos é o mesmo!
- (d) Acima do limiar, quanto maior é a frequência da luz, maior é a energia dos elétrons emitidos!

Que complicado! Mas olhemos para o nosso modelo mecânico, e vamos supor que a luz consiste de partículas. Imaginemos três bolinhas coloridas que correspondem aos corpúsculos de luz. Uma bolinha bem leve de plástico, oca, é pintada de vermelho para corresponder à luz desta cor; outra bolinha de madeira, verde, mais pesada que a anterior, corresponde à cor verde; e uma terceira bolinha de ferro maciço, correspondente ao ultravioleta, é pintado de ultravioleta (!?) - quer dizer, é pintado de violeta.

Quando uma série de bolas vermelhas é solta de uma certa altura, rolando plano abaixo ao longo de canaletas, elas batem nas bolas pretas na cova (os elétrons), mas nenhuma destas é removida (pois as bolas vermelhas são leves, adquirindo pouca energia na queda). Por outro lado, quando as bolinhas verdes são soltas da mesma altura, sempre que elas atingem uma bolinha preta em cheio, elas fazem esta sair da cova, rolando para cima no outro plano. As bolas violetas também fazem isso, mas as bolas pretas que são emitidas sobem bem mais alto no plano inclinado. Regulando a inclinação deste plano (que corresponde a uma regulação da diferença de potencial entre as placas) para que as bolas pretas caiam na caixa (o coletor), pode-se verificar que a energia adquirida por estas é maior quando a bola violeta se choca com elas do que quando as bolas verdes o fazem.

Para concluir, vemos que os quatro fatos observados no efeito fotoelétrico podem ser explicados pelo nosso modelo simplificado, que representa a luz como consistindo de partículas.

a) *Limiar de frequências*: Levando em consideração, como fez Einstein, que a energia de cada fóton é dada por $\epsilon = h\nu$, é fácil ver que quando os fótons não têm energia suficiente para arrancar os elétrons de sua ligação

com o metal (ou seja, estão abaixo do limiar de frequências), nenhum elétron é emitido (isso corresponde ao caso das bolinhas vermelhas).

b) *Um elétron é emitido ao absorver apenas um fóton*. Isso explica porque um aumento no número de fótons leva a um aumento no número de elétrons emitidos.

c) *Um "meio fóton" nunca é observado*. O item (c), além de indicar o mesmo que o item anterior, pode também indicar que um elétron nunca é emitido por meio fóton. Para ver isso considere o efeito fotoelétrico para luz ultravioleta cuja frequência é o dobro da luz verde. Neste caso, um "meio fóton" teria energia suficiente para liberar um elétron. Assim, se "meio fótons" existissem, o número de elétrons liberados neste caso seria bem maior do que o número liberado para frequências mais baixas. Isso, porém, ~~isso~~ não é observado.

d) *Conservação de energia*. Toda a energia de um fóton é transferida para o elétron, que "absorve" o fóton. Parte desta energia é usada para escapar do metal (sair da cova).

Concluimos assim que a suposição de que a luz consiste de partículas com energia $h\nu$ é suficiente para explicar o efeito fotoelétrico. O gráfico obtido por Millikan do potencial de corte (energia do elétron emitido) em função da frequência da luz (Fig. I.7) mostra uma dependência linear, que confirma a lei $\epsilon = h\nu$. Nesta visão corpuscular, a *intensidade* de um feixe de luz monocromática passa a ser dada pelo produto do número de fótons e da energia de cada fóton.

Para finalizar, devemos ser rigorosos e salientar que o resultado precedente não *prova* que a luz se *propaga* na forma de partículas, mas fornece fortes indícios de que, *pelo menos na detecção*, a luz se comporta como partícula.

5. Dualidade Onda-Partícula: versão fraca

Como conciliar, agora, o aspecto corpuscular da luz com o fato de ela **exibir** um padrão de interferência no experimento das duas fendas? Imaginemos que após passar pelas fendas a luz cai sobre uma chapa fotográfica. Se pudéssemos acompanhar a formação de uma imagem, veríamos pontos **aparecendo** um após o outro, correspondendo a cada fóton sendo detectado. Tais pontos, porém, se agrupariam em bandas, acompanhando o padrão senoidal de **intensidade** típico da interferência. Existem filmes mostrando a formação de tal padrão, ponto por ponto, no caso de **elétrons** (Fig. II.6).

É importante frisar que essa formação ponto a ponto do padrão de interferência pode ocorrer mesmo que apenas um fóton incida por vez, por exemplo a cada segundo. Conforme ressaltaria Dirac em 1930, *cada fóton interfere consigo mesmo*. Este espantoso resultado tem sido comprovado em uma série de experimentos, sendo que o primeiro deles foi realizado pelo inglês Geoffrey Taylor em 1909 (Fig. II.7). Usando um vidro esfumado, a intensidade de luz tornou-se tão baixa que ele teve que esperar três meses para o padrão de interferência aparecer na chapa fotográfica!

Podemos agora precisar um pouco melhor a dualidade onda-partícula que dissemos ser a “essência” da Física Quântica. No caso do experimento de duas fendas para a luz, quando baixamos a intensidade da fonte de luz e melhoramos a sensibilidade da detecção, vemos que a luz é absorvida em pacotes mínimos de energia, os fótons. Vimos também que nunca se detectam “meio fótons”. Ora, mas esta é a propriedade de indivisibilidade que atribuímos a partículas!

Temos então conjuntamente uma característica ondulatória, a interferência, e uma característica corpuscular, a indivisibilidade da energia detectada. Como isso é possível? Foi preciso elaborar a Teoria Quântica para responder esta questão!

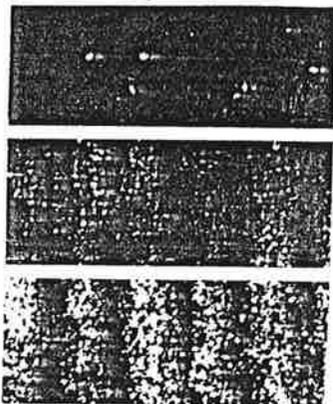
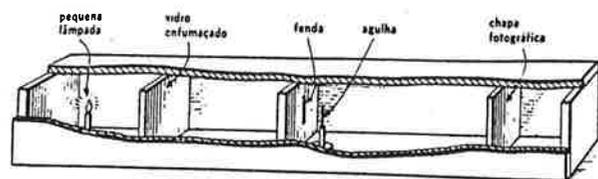


Figura II.6. Formação paulatina de um padrão de interferência. Note-se que cada fóton individual é detectado como um ponto na chapa fotográfica.

Figura II.7. Experimento de Taylor, no qual um padrão de interferência foi obtido para um feixe de luz fraquíssimo.



Enunciemos então esta versão fraca da dualidade onda-partícula: *Toda radiação ondulatória é absorvida em pacotes mínimos de energia ou massa, e qualquer partícula individual pode exibir fenômenos tipicamente ondulatórios, como a interferência.*

Notemos que nesta versão fraca, não afirmamos que os fótons ou elétrons sempre são indivisíveis ou bem localizados em sua propagação, antes de atingir a tela detectora; apenas afirmamos que *quando eles são detectados* eles aparecem de maneira indivisível e bem localizada. Por outro lado, também não dizemos que uma partícula sempre se comporta como uma onda, mas sim que ela sempre *pode* exibir interferência; ou seja, é sempre possível definir uma montagem experimental na qual, se for factível na prática, uma partícula exibe um padrão de interferência. Neste caso, então, temos um comportamento de partícula na detecção, mas para explicar o padrão que estas partículas-detectadas exibem, precisamos supor que *antes da detecção* elas se comportam de maneira ondulatória.

Mais tarde, exploraremos uma versão mais forte desta dualidade onda-partícula, que afirma que em certas condições toda radiação pode ser concebida como seguindo *trajetórias* bem definidas.

Fóton
ou
elétron?

Capítulo III

Ondas em Uma Dimensão

1. Introdução às Ondas

Vimos no capítulo anterior que, de acordo com a Mecânica Quântica, toda partícula pode exibir fenômenos ondulatórios. Nossa intuição a respeito de partículas é razoavelmente boa: não temos problema em imaginar pequenas bolinhas indivisíveis seguindo trajetórias com velocidades bem definidas, se chocando com outras bolinhas, etc.

E quanto à nossa intuição a respeito de ondas? Todos sabemos que uma pedra atirada em um lago provoca ondas circulares cujos raios aumentam progressivamente à medida que vão ficando mais fracas. Estamos acostumados também às ondas do mar que quebram na praia. Imagine que você está em um barco ou uma prancha dentro no mar, a uma distância razoável da praia, e uma série de ondas passa por você e arrebenta na praia. Sempre que uma onda passa por você, você sobe, e depois desce (Fig. III.1); quando outra vier, você sobe e desce de novo...

Se as ondas forem regulares, o seu sobe-e-desce pode ser representado pelo gráfico da Fig. III.2a. Neste gráfico, estamos representando a altura y que você atinge em função do tempo t . Vamos supor que em um minuto passem 10 picos de onda por você (que enjôo!). Diz-se que a *frequência* dessa onda é 10 oscilações por minuto, representada pela letra grega ν .

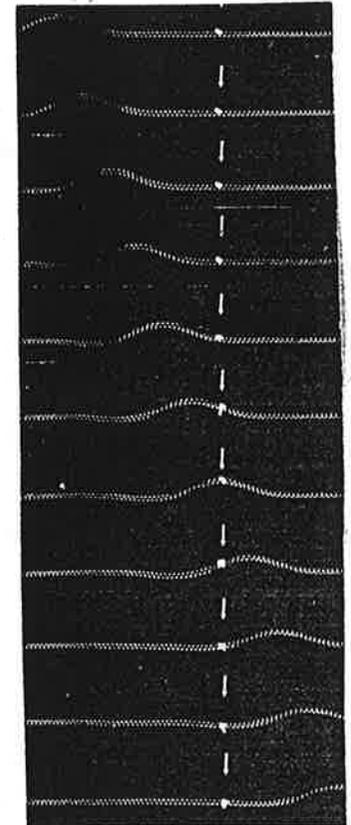


Figura III.1. Movimento de um pulso de onda para a direita, ao longo de uma mola. Um ponto na mola só se desloca verticalmente, e não na direção do pulso.

Pode-se também fazer um gráfico correspondente a uma fotografia instantânea das ondas, tirada por alguém situado no nível d'água. Este gráfico de altura y por distância x está representado na Fig. III.2b, e é bastante semelhante ao anterior. Neste gráfico, a distância entre dois picos de onda é chamada de *comprimento de onda*, representado por λ . Se você estimou v e λ corretamente, você é capaz de calcular a velocidade V da onda, que é dada pela relação simples:

$$v \cdot \lambda = V. \quad (\text{III.1})$$

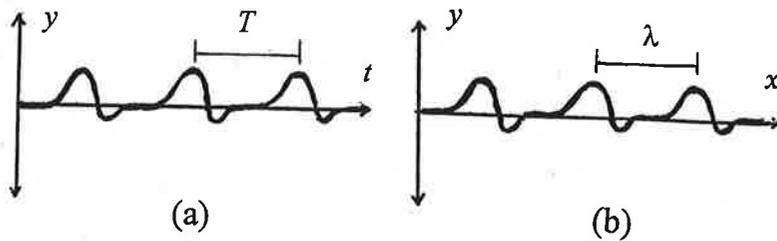


Figura III.2 (a) Representação de uma onda que passa por um ponto x_0 , através de um gráfico $y \times t$. O intervalo entre duas cristas é o período T da onda, cujo inverso é a frequência $\nu = 1/T$. (b) Representação de uma onda em um instante t_0 , por meio de um gráfico $y \times x$. A distância entre duas cristas é o comprimento de onda λ .

2. Amplitude, Fase, Intensidade

Considere as ondas senoidais em uma dimensão da Fig. III.3. Cada uma dessas ondas se propaga em uma dimensão (digamos, para a direita), mas oscila em outra dimensão (para cima e para baixo). Este tipo de onda é chamado de *transversal*, e ocorre tipicamente em uma corda vibrante. Uma onda que oscila na direção de propagação se chama *longitudinal*, e pode ser exemplificada em uma mola. Em 3 dimensões, o som é uma forma de onda longitudinal; as ondas na superfície d'água são um exemplo de onda transversal em 2 dimensões.

A distância de oscilação máxima de uma onda é sua *amplitude*. Na Fig. III.3, vemos vários trens de onda de mesma velocidade e frequência, que possuem uma diferença de fase entre si. A *fase* pode ser medida em relação ao comprimento de onda; na figura, tomando a primeira onda como referência, vemos um deslocamento de fase nas ondas seguintes de $-1/4$ de ciclo, $-1/2$ ciclo ("fora de fase"), $-3/4$ de ciclo e -1 ciclo, sendo que este último volta a estar em fase com a onda original.

Mencionamos na seção II.3 que a *intensidade* I (ou energia por unidade de tempo e de área - no caso de ondas em 3 dimensões) de uma onda é proporcional ao *quadrado* de sua amplitude A :

$$I = \text{cte.} \times A^2 \quad (\text{III.2})$$

Não demonstraremos a validade da eq.(III.2), mas indicaremos um experimento simples com uma mola que sugere sua validade (Fig. III.4). A maneira mais fácil de controlar a energia cinética de um corpo é soltando-o de uma certa altura; se quisermos obter o dobro da energia, é só soltar a mesma massa do dobro da altura (ou soltar o dobro da massa da mesma altura). Assim, podemos preparar uma bola com diferentes energias e fazê-la rolar em um plano horizontal, fazendo-a incidir no prato de uma mola, deitada em repouso no plano. O deslocamento máximo sofrido pela mola, devido à ação da bola, é análogo à amplitude de uma onda (corresponderá, em um caso ideal, à amplitude de oscilação da mola). Digamos que se mede uma amplitude A_1 para uma bola solta de uma altura H . Verifica-se que o deslocamento da mola vai para $2A_1$ apenas quando a bola é solta de uma altura $4H$, o que satisfaz a eq.(III.2).

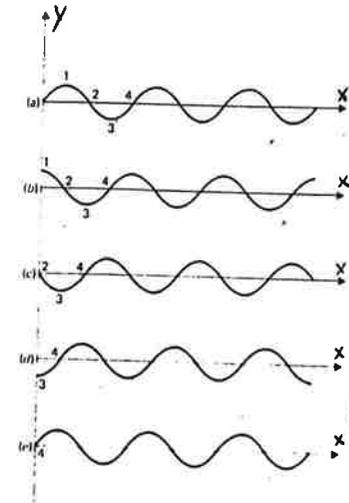


Figura III.3. Em relação à primeira onda, temos deslocamentos de fase para a esquerda de $\lambda/4$, $\lambda/2$, $3\lambda/4$ e λ , com este último voltando a coincidir com a onda original.

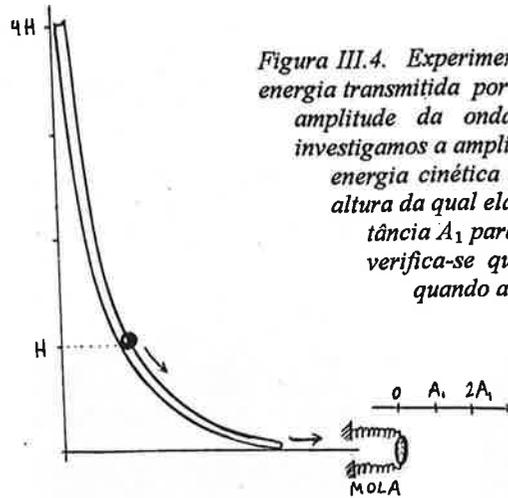


Figura III.4. Experimento para testar a relação entre energia transmitida por uma onda (ou intensidade) e a amplitude da onda. Ao invés de uma onda, investigamos a amplitude de uma mola oscilante. A energia cinética de uma bola é proporcional à altura da qual ela cai. Se a mola estica uma distância A_1 para uma bola caindo da altura H , verifica-se que a mola estica $2A_1$ apenas quando a bola cai uma altura $4H$.

III.3. Superposição de Ondas

Dentro de certos limites, conhecidos como regime de “linearidade”, as ondas satisfazem o *princípio de superposição*: se duas ou mais ondas passarem por um ponto, o deslocamento sentido pelo ponto será a *soma* dos deslocamentos provocados por cada onda. É isso que ocorre no fenômeno de interferência que vimos brevemente na seção II.3. O princípio de superposição é ilustrado nas Figs. III.5 e III.6, onde se mostra a passagem de dois pulsos em uma corda. Uma consequência desse princípio é que diferentes ondas ou pulsos se atravessam mutuamente sem sofrer qualquer alteração permanente devido a este encontro.

Quando duas ondas propagando na mesma direção e sentido estão oscilando “em fase” em qualquer ponto, ou seja, quando elas atingem seus máximos no mesmo instante e seus mínimos no mesmo instante, então tem-se uma superposição *construtiva* (Fig. III.7). Quando elas estão oscilando “fora de fase”, com o máximo de uma ocorrendo juntamente com o mínimo da outra, a superposição é *destrutiva* (Fig. III.8).

Os exemplos mostrados nas figuras anteriores correspondem a ondas de mesmo comprimento de onda. Para ondas de diferentes comprimentos de onda, e com fases relativas quaisquer, basta somar as amplitudes ponto a ponto, em cada instante temporal. Veremos mais um exemplo de superposição ao considerarmos as ondas estacionárias, na seção seguinte.

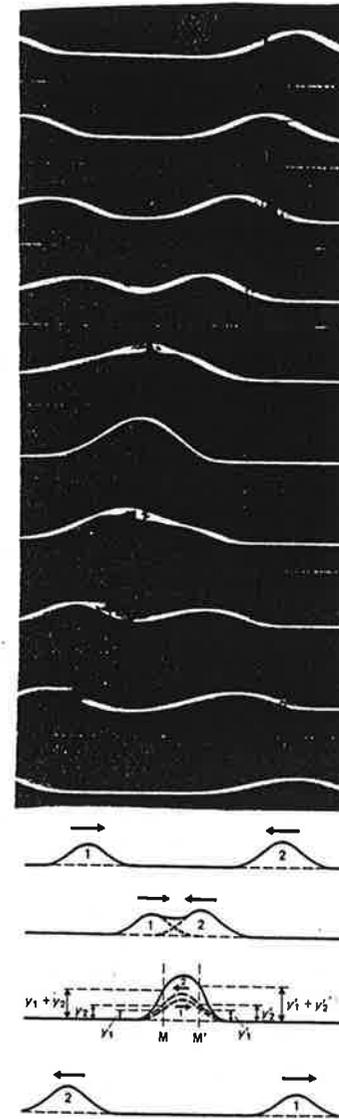


Figura III.5. Superposição de dois pulsos propagando-se em sentidos opostos, acompanhado de um desenho ilustrando a soma dos pulsos.

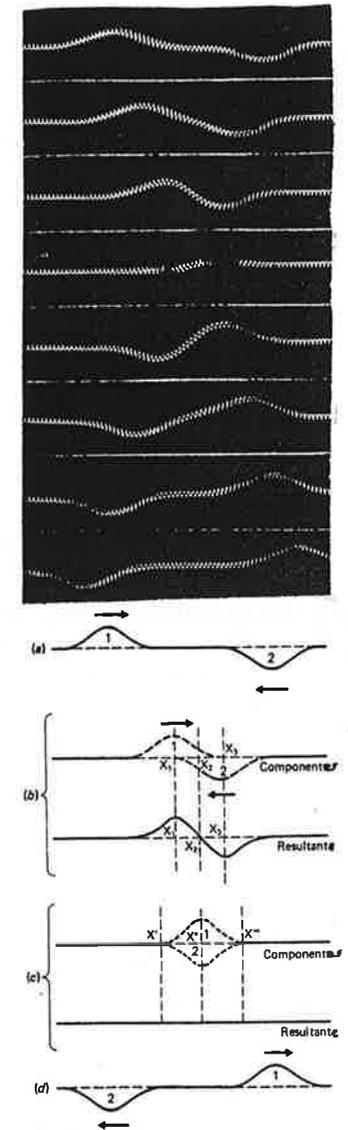


Figura III.6. Mesmo tipo de superposição que a figura anterior, só que os pulsos tem amplitudes com sinais opostos.

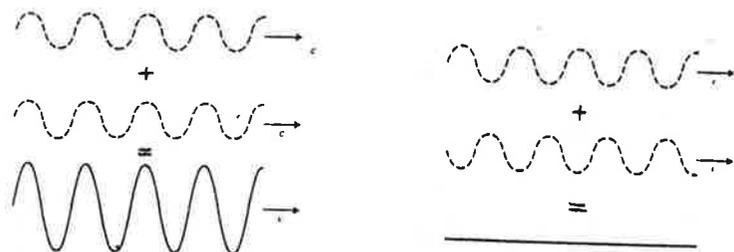


Figura III.7. Superposição construtiva.

Figura III.8. Superposição destrutiva.

III.4. Reflexão e Ondas Estacionárias

Considere uma corda amarrada em uma das pontas a uma parede. Um pulso que se propaga na corda em direção à parede irá refletir e retornar com sua amplitude invertida (Fig. III.9). Isso pode ser entendido considerando-se a 3ª lei de Newton: a corda exerce uma força para cima na parede, e esta exerce uma força de reação para baixo na corda, que gera o pulso invertido. Já se a ponta da corda puder se mover livremente na direção vertical, o pulso retornará com sua amplitude no mesmo sentido (Fig. III.10).

Consideremos agora a reflexão de uma onda contínua com uma condição de contorno qualquer: ponta fixa, solta, ou caso intermediário. De qualquer maneira, teremos dois trens de onda de mesma amplitude se propagando em sentidos opostos. O que acontecerá? Nos instantes em que os picos das duas ondas coincidirem, teremos uma forma de onda com mesmo comprimento de onda mas o dobro da amplitude (Fig. III.11a). Quando as ondas estiverem fora de fase, a resultante será nula (Fig. III.11b). Nos instantes intermediários teremos *nodos* que não se movimentam, enquanto que os outros pontos formarão *ventres* que aumentam e diminuem em sincronia. O movimento resultante forma uma *onda estacionária* (Fig. III.12). O comprimento de um ventre, entre dois nodos, é $\frac{1}{2}$ do comprimento da onda original.

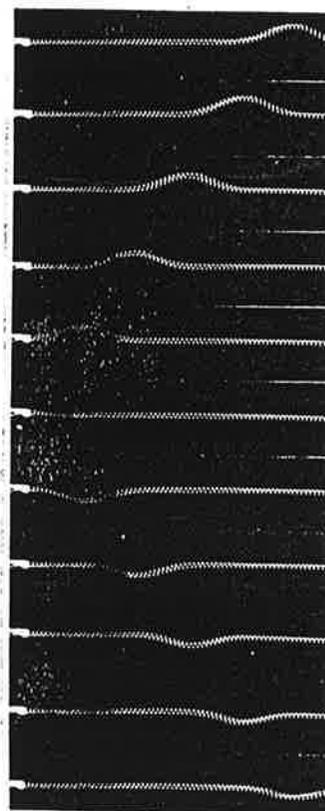


Figura III.9. Reflexão de um pulso para uma mola presa na parede. Observe a inversão do pulso refletido.

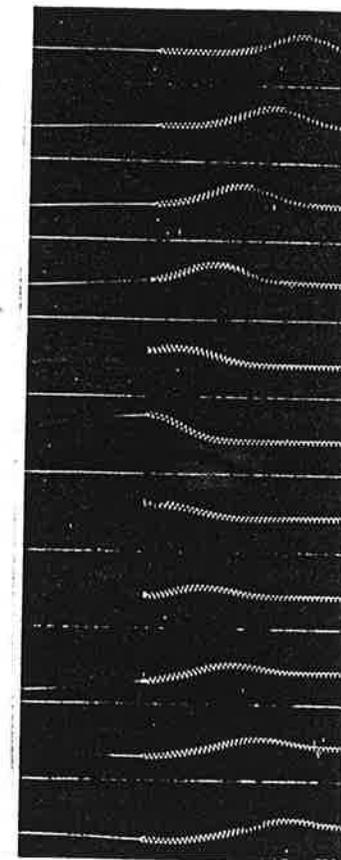


Figura III.10. Reflexão de um pulso com a ponta da mola quase livre (no caso, ela está presa a um barbante leve). Não ocorre inversão do pulso.

Podemos gerar uma onda estacionária ao oscilar com a mão uma corda presa a uma parede. Neste caso, porém, observaremos ondas estacionárias apenas para certas frequências de oscilação (Fig. III.13). Isso ocorre porque as ondas que refletem da parede refletem novamente em nossa mão. Para manter o padrão de onda estacionária, esta onda que reflete de nossa mão precisa estar em fase com a onda inicial, gerada pela oscilação de nossa mão.

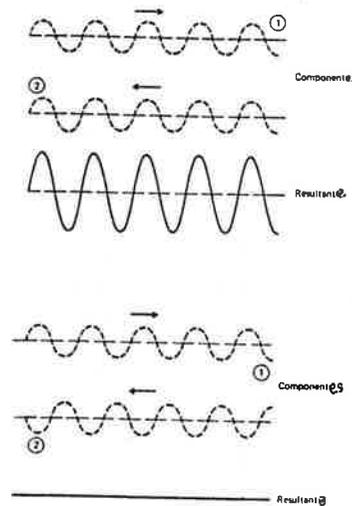


Figura III.11. A superposição de duas ondas contínuas se propagando em sentidos opostos gera uma onda estacionária. Em cima, os ventres atingem deslocamento máximo. Em baixo, a superposição é destrutiva.

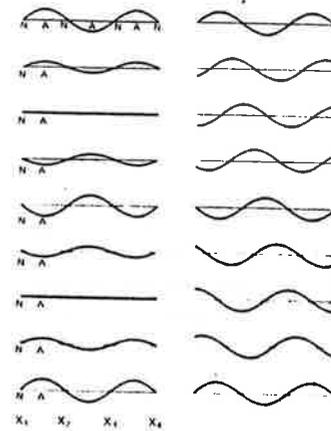
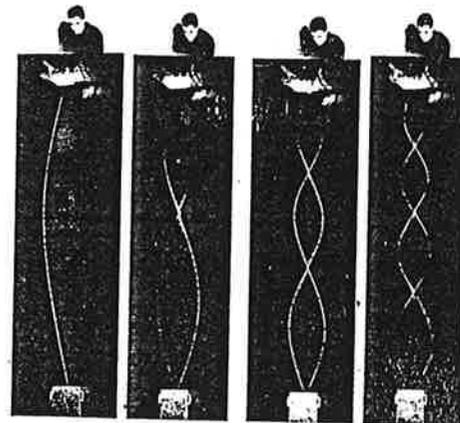


Figura III.12. Comparação de uma onda estacionária (à esquerda) com uma onda progressiva (à direita).

Figura III.13. Ondas estacionárias geradas entre dois contornos, uma parede fixa e a mão de um homem. A frequência fundamental ν (à esquerda) é a mais baixa, gerando um ventre. As frequências sucessivas são múltiplos inteiros da fundamental: 2ν , 3ν , 4ν .



Este fenômeno de ondas estacionárias presas entre dois contornos desempenha um papel importantíssimo na Física Quântica. Note que com este fenômeno temos o surgimento de um conjunto *discreto* de frequências a partir das ondas, que têm uma natureza *contínua*. Este fenômeno foi usado por Broglie e por Schrödinger para explicar a existência de frequências (energias) discretas nos átomos, conforme havia descoberto Bohr (ver Cap. I). Exploraremos essa analogia mais a fundo em um capítulo posterior, quando estudarmos o átomo.

III.5. Divisão de Ondas

Vamos examinar agora uma última propriedade de ondas em uma dimensão, que será útil para o próximo capítulo. Quando juntamos duas cordas ou molas de peso diferente, e lançamos um pulso em direção à junção, parte do pulso se transmite e parte é refletido. Se o pulso sai da mola mais pesada e incide na mola mais leve, não ocorre inversão de amplitude entre o pulso transmitido e refletido (Fig. III.14). Este é um exemplo de *divisão de onda*. O que acontece com o valor das amplitudes neste caso?

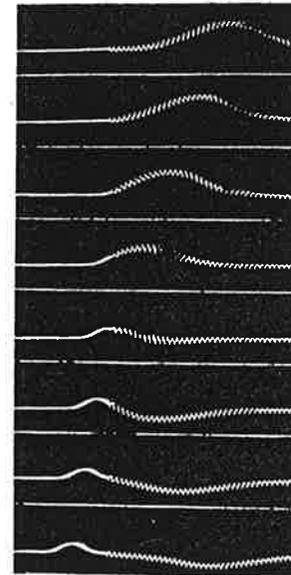


Figura III.14. Pulso que se propaga de uma mola leve (direita) para uma pesada. Observam-se os pulsos refletido e transmitido.

Para investigar isso, seria interessante trabalharmos com ondas transmitida e refletida que se propagassem no mesmo meio. Isso pode ser conseguido inserindo-se um pedaço de mola de peso diferente da mola com a qual trabalhamos (Fig. III.15). Dessa maneira, teríamos uma onda refletida e uma onda transmitida no mesmo meio. Qual a relação entre as amplitudes transmitida (A_t) e refletida (A_r)? A princípio diríamos que a soma das amplitudes deve ser igual à amplitude original A_0 (desprezando a parte da onda que fica na junção). Porém, devemos lembrar que a energia que se propaga tem que se conservar. Assim, é a soma das intensidades transmitida (I_t) e refletida (I_r) que é igual à intensidade inicial I_0 .

Se a junção é de tal natureza que a amplitude refletida é igual à transmitida (para simplificar), então, levando em consideração a eq.(III.2) que relaciona

amplitude e intensidade, chegamos à seguinte equação para as amplitudes de ondas igualmente divididas:

$$A_t = A_r = A_0 / \sqrt{2} \quad (\text{III.3})$$

O leitor arguto poderá achar este resultado estranho, já que duas ondas que se superpõem têm suas amplitudes somadas: como ficaria então neste caso a conservação de energia? Veremos a resposta no capítulo seguinte, mas já podemos fornecer uma pista para resolver este mistério: como podemos superpor duas ondas se propagando na mesma direção e sentido (como ilustrado na Fig. III.7)?

Para finalizar, vamos definir um critério para comparar as fases das ondas transmitidas e refletidas no mesmo meio (Fig. III.16). Tal critério é o seguinte: tomamos a onda refletida e "giramos" ela em torno do ponto de reflexão até ela se superpor à onda transmitida. Feito isso, é só verificar diretamente qual o deslocamento de fase relativo entre as duas ondas.

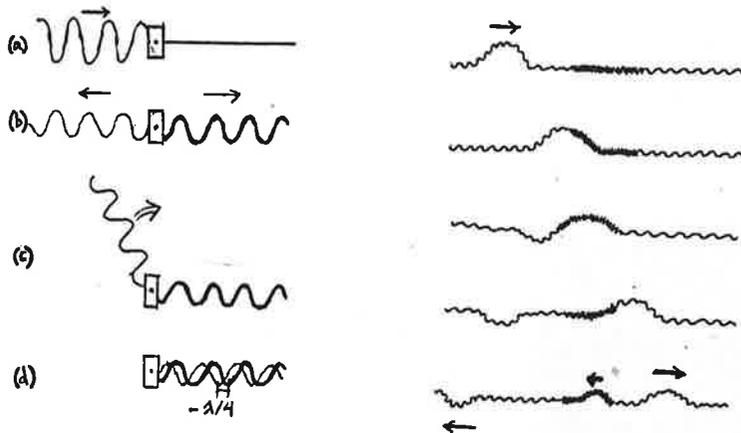


Figura III.15. Esboço de um pulso vindo da esquerda em uma mola fina, se dividindo em uma junção de mola grossa (onde adquire velocidade mais alta), e novamente ao passar para a mola fina, à direita.

Figura III.16. (a) Onda contínua incidindo em uma junção pela esquerda. (b) Metade da onda reflete e metade transmite (omite-se a onda original). (c) Congelando-se a figura anterior, gira-se o trem de onda refletido até superpor com onda transmitida. (d) Comparando as duas, vê-se que a onda refletida sofreu um atraso de $\frac{1}{4}$ de ciclo em relação à transmitida.

Capítulo IV

Interferômetro de Mach-Zehnder

1. Interferômetro de Mach-Zehnder Clássico

Vamos agora examinar um arranjo experimental parecido com o experimento das duas fendas, porém mais simples, que faz uso do princípio de superposição. O aparelho em questão chama-se "interferômetro de Mach-Zehnder", tendo sido desenvolvido no século XIX.

Para entender o funcionamento deste interferômetro, iremos considerar um feixe de luz como consistindo de ondas em uma dimensão, conforme visto no capítulo anterior. Um modelo ondulatório razoável para um feixe de luz, gerado por exemplo por uma lanterna, é de que ele consiste de um monte de "trens de onda", conforme ilustrado na Fig. IV.1. Por hora, vamos considerar apenas um destes trens de onda. Veremos que esta simplificação não irá alterar nossas conclusões.

Então vamos lá! O primeiro componente do interferômetro é um "espelho semi-refletor", um vidro fumê que divide o feixe de luz em duas partes, uma transmitida e uma refletida, de igual amplitude (Fig. IV.2). Isso é análogo ao que vimos na seção III.5, com a diferença de que neste caso o componente refletido sai a um ângulo de 90° em relação ao transmitido. Assim, de acordo com a eq. (III.3), se a amplitude do feixe inicial é A_0 , a do feixe transmitido é $A_0 / \sqrt{2}$, assim como a do refletido.

Além disso, o trem de onda refletido sofre um deslocamento de fase em relação ao trem transmitido através do espelho. Adotaremos a regra de que a cada reflexão ocorre um atraso de $\frac{1}{4}$ de ciclo em relação ao trem transmitido (Figs. III.16 e IV.2).

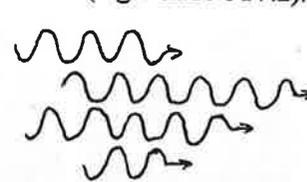


Figura IV.1. A luz emitida por um filamento pode ser representada por uma série de "trens de onda" curtos.

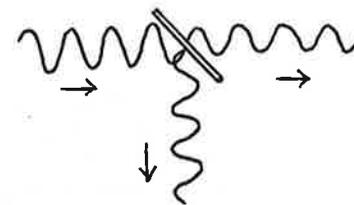


Figura IV.2. Um espelho semi-refletor divide uma onda em partes iguais, com a parte refletida desfasada em $\frac{1}{4}$ de ciclo em relação à transmitida.

Pronto! Eis toda a Física que iremos usar para entender o interferômetro (além da superposição de ondas, que já conhecemos bem). Agora é só uma questão de entender o que acontece quando mais de um espelho é usado. O esquema do interferômetro de Mach-Zehnder está na Fig. IV.3.

O feixe inicial passa por um espelho semi-refletor S_1 , dividindo o feixe em uma componente transmitida (A) e uma refletida (B). Cada componente é então refletida nos espelhos E_1 e E_2 , e voltam a se cruzar no espelho semi-refletor S_2 , rumando então para os detectores (potenciômetros) D_1 e D_2 . O que acontece?

Esperaríamos que cada componente se dividisse em duas partes em S_2 , de forma que cada detector mediria 50% do feixe. Mas não é isso que acontece! Observa-se, quando a distância percorrida pelas duas componentes forem exatamente iguais, que 100% do feixe original incide em D_1 , e 0% em D_2 !

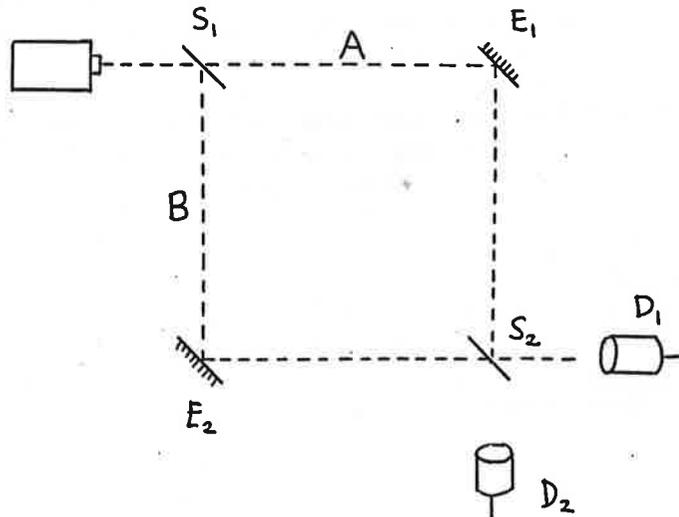


Figura IV.3. Interferômetro de Mach-Zehnder. Quando os caminhos A e B são iguais, toda a luz incidente termina no detector D_1 (supondo que os detectores são 100% eficientes). Para entender porque, é preciso considerar que cada reflexão introduz um atraso de $\frac{1}{4}$ de ciclo em relação ao feixe transmitido.

Isso acontece devido à superposição construtiva em D_1 e superposição destrutiva em D_2 (Fig. IV.4). O feixe A se aproxima de S_2 com uma amplitude $A_0 / \sqrt{2}$ e com um deslocamento de fase relativo de $-\frac{1}{4}$ de ciclo, pois sofreu uma reflexão em E_1 ; o feixe B se aproxima com mesma amplitude e uma defasagem de $-\frac{1}{2}$ ciclo, pois sofreu reflexões em S_1 e E_2 . No espelho semi-refletor S_2 , metade do feixe A é transmitido e metade é refletido, sendo que a mesma coisa ocorre para o feixe B. Consideremos as partes de A e de B que rumam para D_2 . A componente que percorreu o caminho A passa direto sem refletir, permanecendo defasado em $-\frac{1}{4}$ de ciclo, e passando a ter uma amplitude $A_0/2$ após a divisão da onda; enquanto isso, o componente vindo de B sofre uma reflexão adicional (em S_2), ficando deslocado em $-\frac{3}{4}$ de ciclo, com amplitude $A_0/2$. Temos assim uma diferença de $\frac{1}{2}$ ciclo entre os componentes de mesma amplitude, que corresponde a uma superposição destrutiva. Ou seja, as amplitudes que atingem D_2 se anulam, e nada é detectado neste potenciômetro.

No caso das partes que rumam para D_1 , a componente que veio por A sofreu no total duas reflexões (em E_1 , S_2), enquanto que a que veio por B também sofreu duas (em S_1 , E_2). Cada qual tem um deslocamento de fase de $-\frac{1}{2}$ ciclo, e assim não têm nenhuma diferença de fase entre si, resultando em uma superposição construtiva. Como cada uma destas componentes que atingem D_1 tem amplitude $A_0/2$, elas se somam para uma amplitude A_0 , igual à do feixe incidente!

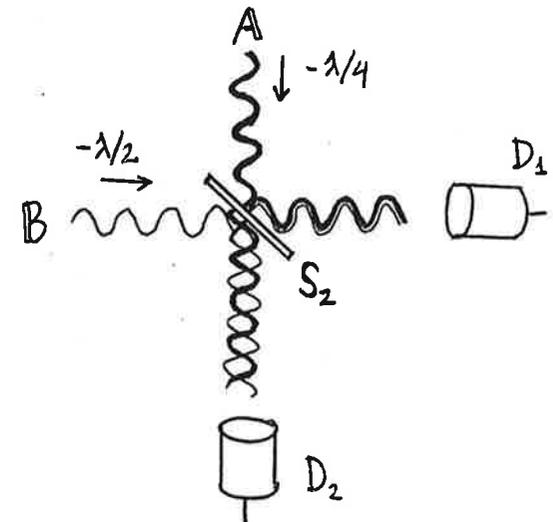


Figura IV.4. Esquema das fases das ondas que incidem no espelho semi-refletor S_2 . Toda luz incide no detector D_1 , pois na direção do detector D_2 ocorre superposição destrutiva.

2. Interferometria para Um Fóton.

Para transformar o arranjo precedente em um experimento quântico, no qual a dualidade onda-partícula é relevante, é preciso diminuir a intensidade do feixe até que apenas um fóton incida em S_1 por vez. Além disso, é preciso utilizar detectores sensíveis à presença de um único fóton, como é o caso de uma "fotomultiplicadora", que possui uma eficiência de 30% (ou seja, cerca de um terço dos fótons que nela incidem geram um sinal amplificado).

Vimos que experimentos ópticos com feixes fraquíssimos, de forma que apenas um fóton se encontra por vez dentro do interferômetro, têm sido feitos desde 1909 no experimento das duas fendas (seção II.5). Porém, em tais experimentos nunca sabemos quando o fóton está chegando no interferômetro. A partir de 1985, porém, tornou-se viável a preparação do que é chamado "estado monofotônico", ou seja, um pacote de onda que carrega exatamente um quantum de energia e que atinge o interferômetro em um instante bem preciso.

O interferômetro de Mach-Zehnder para fótons únicos tem o mesmo comportamento que o caso clássico: *todos os fótons incidem em D_1 , e nenhum em D_2* ! Tal experimento foi realizado em 1986 em Orsay, na França, por Grangier, Roger & Aspect. Este experimento exemplifica mais uma vez a famosa asserção feita por Dirac, que mencionamos anteriormente, de que "cada fóton só interfere consigo mesmo".

3. Por Qual Caminho Rumou o Fóton?

^{iv} A questão a ser colocada agora é a seguinte. *No interferômetro da Fig. III.3, depois que o fóton passou por S_1 , mas antes de incidir em S_2 , em qual caminho ele se encontra, em A ou em B?*

Vamos supor que o fóton se encontra em A, e não em B. Isso pode ser realizado experimentalmente retirando-se o espelho semi-refletor S_1 de seu lugar. Nesse caso, o fóton incide em S_2 , e pode ser detectado *ou* em D_1 (50% de probabilidade) *ou* em D_2 (50%), não ocorrendo nenhuma interferência de componentes. Se supormos que o fóton inicialmente rumou por B, e não por A (realizado pela substituição de S_1 por um espelho de reflexão total), também teríamos 50% de chance de detectá-lo em D_2 . (Fig. III.5).

Agora, se o fóton estivesse *ou* em A *ou* em B, continuaríamos a ter uma probabilidade de 50% de detectar o fóton em D_2 . Isso segue da própria

definição do conectivo lógico "ou": se em A é 50% e em B é 50%, então em "A ou B" tem que ser 50%. No entanto, vimos que no experimento da Fig. III.3, para um único fóton, a probabilidade do fóton atingir D_2 não é 50%, é 0%! Logo, *é falsa a afirmação de que o fóton está ou em A ou em B!*

Isso é incrível! Vimos no capítulo II que a luz é detectada na forma de partículas, e esperaríamos que tais partículas existissem durante a propagação da luz, seguindo trajetórias bem definidas (mesmo que desconhecidas). No entanto, parece que chegamos à conclusão de que os fótons não seguem trajetórias bem definidas. Como sair desse impasse?

Há um punhado de saídas possíveis. Consideremos três delas:

(1) *Interpretação Ondulatória* (Schrödinger). Talvez o fóton possa se dividir simetricamente em dois meio-fótons no primeiro espelho semi-refletor S_1 . Em outras palavras, teríamos um pacote de onda que se dividiria em duas partes em S_1 , e se recombinaria em S_2 , conforme prevê a Física Ondulatória Clássica. O problema seria explicar porque em outros experimentos nunca detectamos meio fótons (ver seção II.5).

(2) *Interpretação da Dupla Solução* (de Broglie). Talvez o objeto quântico se divida em duas partes: o fóton e a sua onda associada. Assim, o fóton de fato seguiria uma trajetória, por A ou por B, mas simultaneamente a sua onda associada se dividiria em duas partes iguais, uma rumando por A e outra por B. A partícula seria um "surfista" que só pode navegar aonde há ondas. Como as ondas se cancelam próximas ao detector D_2 , o fóton é obrigado a surfar para D_1 .

(3) *Interpretação da Complementaridade* (Bohr). Um fenômeno pode ser ondulatório ou corpuscular, nunca os dois ao mesmo tempo. O experimento examinado é um fenômeno ondulatório, e portanto não tem sentido perguntar onde está o fóton.

Exploraremos estas interpretações em capítulos posteriores. Vamos agora dar uma olhada superficial na maneira como o formalismo da Teoria Quântica descreve o experimento de Mach-Zehnder para um fóton único. Aos poucos, veremos que as diferentes interpretações são consistentes com este formalismo, que fornece as regras para se calcular valores possíveis de medições e as respectivas probabilidades.

4. Princípio de Superposição para Estados Quânticos

Se o espelho semi-refletor S_1 estiver removido, todos concordam que o fóton ou o pacote de onda ruma pelo caminho A. Por exemplo, se inserirmos

um detector neste caminho, ele sempre registrará a presença do fóton (supondo que o detector é 100% eficiente). Podemos assim atribuir um *estado* ao nosso sistema quântico, em um certo instante, que denotaremos por ψ_A . Esse estado diz que o fóton será detectado com certeza no caminho A. Analogamente, podemos definir o estado ψ_B . Se o sistema estiver neste estado, um detector no caminho B registrará um fóton.

Esses dois estados, ψ_A e ψ_B , têm uma propriedade interessante. Se o estado for ψ_A , um detector no caminho B não registrará nenhum fóton; se o estado for ψ_B , nada poderá ser detectado no caminho A. Dizemos nesse caso que esses estados são *ortogonais*.

Agora vamos enunciar um dos princípios fundamentais da Mecânica Quântica, o chamado Princípio de Superposição: *Dados dois estados possíveis de um sistema quântico, então a soma desses dois estados também é um estado possível do sistema.*

Como conseqüência deste princípio, o estado $\psi = \psi_A + \psi_B$ também descreve uma situação possível. De fato, é justamente este o estado assumido pelo pulso de luz no experimento de Mach-Zehnder para um fóton (omitimos por hora detalhes como normalização e fases relativas)!

Mas o que diz esse estado? O fóton está em dois lugares ao mesmo tempo? Não, o formalismo da Teoria Quântica não trata dessas questões, ele não se preocupa em descrever a realidade que existe além de nossas observações, mas sim em fornecer previsões de medições realizadas em diferentes situações experimentais. Mas qual o significado do “estado” em Física Quântica? A esta questão, cada interpretação responde de maneira própria, semelhante ao que vimos na seção anterior.

Vemos assim que o formalismo quântico, por si só, não nos diz o que acontece quando o fóton entra dentro do interferômetro. Mas espera aí.... Porque a gente simplesmente não mede, por meio de um detector super sensível, por qual caminho o fóton passou? Exploraremos esta possibilidade no capítulo seguinte.

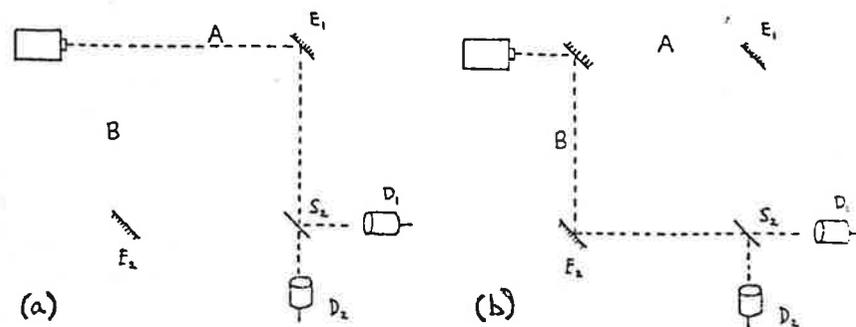


Figura IV.5. (a) Se tivermos certeza que o fóton rumou pelo caminho A, por exemplo removendo o espelho semi-refletor S_1 , então ele tem uma possibilidade de 50% de ser transmitido em S_2 e detectado em D_2 , e 50% de ser refletido e detectado em D_1 . (b) Há também uma probabilidade de 50% de detecção em D_2 quando o fóton ruma por B, por exemplo colocando um espelho comum (de reflexão total) no lugar de S_1 .

5. Variando a Fase de um Componente no Interferômetro

Vimos que, num espelho semi-refletor, uma onda transmitida e uma refletida possuem uma diferença de fase de $-\frac{1}{4}$ de ciclo. Na Fig. IV.2, supusemos, para simplificar, que a onda incidente e a transmitida não têm defasagem mútua. No entanto, quando a luz passa de um meio para outro, em geral ela muda de velocidade, e dessa maneira o comprimento de onda também varia (pela eq.III.1, pois a frequência não muda).

Por exemplo, a luz no ar se propaga com uma velocidade de 3 milhões de quilômetros por segundo, enquanto que no vidro ela viaja a 2 milhões de km/s. Assim, no vidro, o comprimento de onda da luz é $\frac{2}{3}$ do valor λ no ar. Agora, se uma onda contínua de luz, com uma frequência bem determinada (luz “monocromática”, como a luz vermelha), passasse por um vidro finíssimo de espessura λ , ele sofreria um deslocamento de fase de $\frac{1}{2}$ ciclo. É claro que não existe um vidro tão fino, mas se sua espessura for exatamente $n\lambda$, onde n é um número inteiro ímpar, então a defasagem resultante também será de $\frac{1}{2}$ ciclo (Fig. IV.6).

Pois bem, o que aconteceria agora se tal pedaço de vidro fosse inserido no caminho A do interferômetro de Mach-Zehnder? Podemos inves-

tigar isso através do "Kit Onda" que foi distribuído em classe. Fazendo um desenho análogo ao da Fig. IV.5, só que agora com o feixe A chegando em S_2 com uma fase relativa de $+\lambda/4$, vê-se que a superposição construtiva passa a acontecer nos componentes rumando para D_2 , e a destrutiva nos componentes indo para D_1 (basta imaginar que o trem de onda mais grosso, na figura, é deslocado em $1/2$ ciclo).

De fato, se a defasagem introduzida no componente A variar continuamente, obteremos uma variação na intensidade (número de fótons) detectada em cada detector que varia de zero até um máximo, de acordo com $\sin^2(\phi)$, onde ϕ é o deslocamento de fase introduzido no caminho A (nesta fórmula, a fase ϕ é expressa em ângulos: 90° corresponde a $1/4$ de ciclo, 180° a $1/2$ ciclo, 270° a $3/4$ de ciclo, e 0° corresponde a duas ondas em fase). Foi exatamente isso que Grangier, Roger & Aspect observaram no experimento em que os fótons entram um de cada vez no interferômetro (Fig. IV.7).

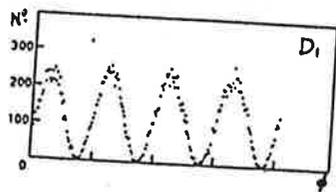
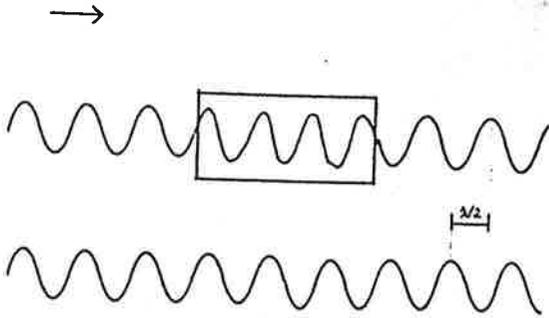


Figura IV.6. Uma onda contínua de comprimento de onda λ sofre um deslocamento de fase de $1/2$ ciclo ao passar por um meio de espessura 3λ no qual a velocidade da onda é $2/3$ do valor original.

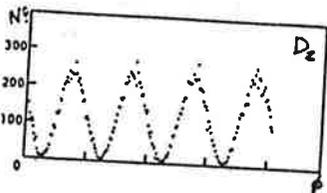


Figura IV.7. Resultados obtidos por Grangier, Roger & Aspect para o número de fótons que chega a cada detector a cada 15 segundos, em função da defasagem ϕ no caminho A.

Capítulo V

"Fenômenos" Corpuscular e Ondulatório

1. Experimento de Anti-Correlação

Na seção I.4 demo-nos ao trabalho de examinar o efeito fotoelétrico para entender em que sentido a luz tem uma natureza corpuscular, e uma das conclusões a que chegamos é que não existem "meio fótons", ou, pelo menos, eles nunca são detectados. É possível, porém, realizar um experimento bem mais simples (a nível conceitual, não a nível de dificuldade prática), que é conhecido por experimento de "anti-correlação".

O experimento consiste simplesmente em lançar um fóton contra um espelho semi-refletor S_1 , e detectá-lo em um de dois detectores D_1 ou D_2 (Fig. V.1). Observa-se então que quando o fóton é detectado em D_1 , nada é detectado em D_2 . Isso indica de maneira direta que o quantum de luz não se divide em duas partes que possam ser simultaneamente detectadas (satisfazendo a versão fraca da dualidade onda-partícula, seção II.5).

Na verdade, às vezes ocorrem contagens em coincidência (ou seja, dentro de uma janela de 1 segundo, por exemplo), mas isso é devido à presença de dois fótons no pacote de onda incidente. Tal coincidência ocorre em taxas bastante baixas. Este experimento também foi realizado por Grangier, Roger & Aspect, em 1986. A dificuldade em realizá-la se deve à preparação de um único fóton.

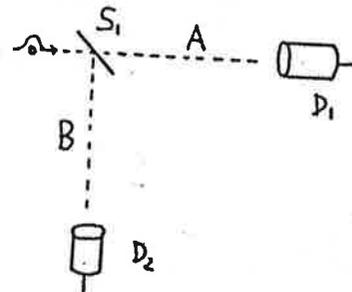


Figura V.1. Experimento de Anti-Correlação. Um fóton individual que passa por um espelho semi-refletor S_1 é detectado em D_1 ou D_2 , nunca nos dois simultaneamente.

2. "Fenômeno" Corpuscular

O experimento visto acima é um exemplo do que Niels Bohr chamava de "fenômeno" corpuscular. Pusemos aspas na palavra *fenômeno* porque para Bohr ela tinha um significado diferente do convencional. Normalmente, "fenômeno" designa qualquer coisa que aparece para a nossa percepção. Para Bohr, a partir de 1935, ele designa o todo que envolve o objeto quântico e a aparelhagem experimental. Além disso, um fenômeno só se completa quando o experimento termina, quando um resultado experimental é registrado a nível macroscópico.

Agora, porque o fenômeno descrito acima é "corpuscular"? Não é só porque o fóton é detectado como uma quantidade discreta e bem localizada de energia, mas principalmente porque, após detectarmos um fóton, podemos dizer com segurança qual *trajetória* ou caminho ele seguiu.

Vejamos uma outra versão do experimento acima, obtido a partir do interferômetro de Mach-Zehnder. Considere a aparelhagem representada na Fig. IV.3, mas com o espelho semi-refletor S_2 retirado. O arranjo resultante (Fig. V.2) é quase idêntico ao que vimos acima. Se registramos um "clac" em D_1 , podemos inferir que o fóton veio pelo caminho A ; se o "clac" for registrado em D_2 , a trajetória inferida é B . Eis um fenômeno corpuscular!

Agora, porque o fenômeno descrito na seção IV.2 (interferometria para um único fóton) *não* é corpuscular? Em primeiro lugar, porque só podemos descrever o fato de que nenhum fóton ruma para D_2 através de um modelo ondulatório (superposições a partir de S_2). Este critério, porém, é às vezes ambíguo, pois alguém poderia elaborar um modelo corpuscular que explicasse a interferência. Um critério mais adequado é a completa falta de informação sobre qual trajetória o fóton poderia ter vindo. O experimento com o interferômetro de Mach-Zehnder é um fenômeno ondulatório porque *não podemos inferir que o fóton veio pelo caminho A nem pelo caminho B*; vimos inclusive que não podemos nem dizer que "ele veio por A ou veio por B".

Mas o fenômeno que chamamos "ondulatório" não envolve a detecção de fótons individuais, evidenciando a existência de corpúsculos indivisíveis? Aquele fenômeno não deveria também ser considerado parcialmente corpuscular? Isso parece correto, especialmente em um arranjo como o da Fig. V.3, no qual um modelo ondulatório clássico esperaria sempre que metade do feixe incidente em S_1 seria registrado em cada detector.

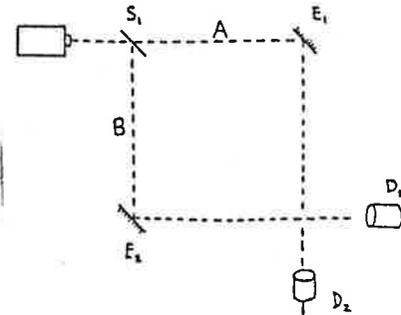


Figura V.2. Um fenômeno corpuscular pode ser obtido a partir do interferômetro de Mach-Zehnder simplesmente removendo o espelho semi-refletor S_2 .

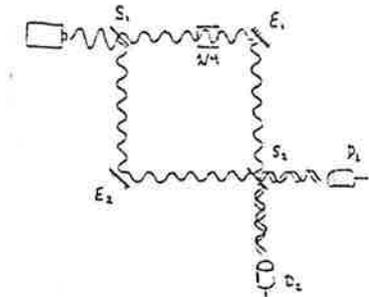


Figura V.3. Se uma fase adicional de $\pi/4$ de ciclo for introduzida no caminho A do interferômetro, a estatística de contagens deste fenômeno ondulatório é idêntica ao do caso corpuscular da figura anterior.

3. Dualidade Onda-Partícula: versão forte

Estamos prontos para enunciar a versão que Bohr deu para a dualidade onda-partícula, que chamaremos de "versão forte": *Um sistema quântico ou exhibe aspectos corpusculares (segundo trajetórias bem definidas), ou aspectos ondulatórios (sem trajetórias bem definidas), dependendo do arranjo experimental, mas nunca ambos ao mesmo tempo.*

Essas palavras não são as de Bohr, mas expressam a sua noção de que onda e partícula são aspectos mutuamente exclusivos, mas *complementares*, da natureza. Ou seja, para representar um objeto quântico como um elétron, ou um fóton, podemos encará-lo ou como partícula, para certas situações experimentais, ou como onda, para outras situações. Segundo Bohr, é impossível montar uma situação experimental que exhiba esses dois aspectos da natureza (porisso é que são mutuamente exclusivos). Porém, só podemos compreender um objeto quântico de maneira completa quando levamos em conta esses dois aspectos complementares.

Para Bohr, essa situação exprime uma limitação fundamental que existe em nossa linguagem, e em nossa capacidade de representar pictoricamente o mundo. Nossa linguagem é adequada para descrever objetos macroscópicos, como um aparelho de medição, e serve para nos comunicarmos com outros homens, por exemplo informando que obtivemos um determinado resultado experimental. Através de nossa linguagem, não conseguimos representar um objeto quântico em um "quadro único": precisamos de descrições complementares.

4. Fenômenos Intermediários

Estudar a filosofia de Niels Bohr é um assunto interessante e complicado, mas não temos mais tempo de fazê-lo aqui. Vale mencionar, porém, um resultado que só foi claramente enunciado na literatura científica em 1979, em um trabalho de Wootters & Zurek. Existem arranjos experimentais que correspondem a "fenômenos intermediários" entre onda e partícula. No caso do interferômetro de Mach-Zehnder (Fig. IV.3), tais fenômenos surgem quando o espelho semi-refletor S_2 passa a refletir mais do que a metade de um feixe incidente, ou refletir menos da metade (sem porém refletir tudo ou refletir nada, situações que recairiam no fenômeno corpuscular).

Aqui não é o lugar para explicarmos mais a fundo esses fenômenos intermediários. Vale apenas dizer que, nesse tipo de experimento, podemos dizer que a partícula rumou por uma certa trajetória com uma probabilidade diferente de 0, de 1 (casos corpusculares), ou de $\frac{1}{2}$ (caso ondulatório, quando há apenas duas trajetórias possíveis). Complicado, né!?

Isso quer dizer que Bohr estava errado? Não muito... Apesar de haver fenômenos intermediários, coisa em que Bohr não havia pensado, cada um desses fenômenos possui um par mutuamente exclusivo e complementar. Por exemplo, um fenômeno 30% corpuscular e 70% ondulatório tem um fenômeno complementar que é 70% corpuscular e 30% ondulatório. Em suma, a dualidade se mantém, apesar de ela não se restringir ao par onda-partícula.

5. Medições de Trajetória em Fenômenos Ondulatórios

Consideremos agora uma possibilidade aventada na seção IV.4 para escapar das limitações impostas pela dualidade onda-partícula. Porque, em um fenômeno ondulatório como o da Fig. IV.3 (interferômetro de Mach-Zehnder),

não medimos por onde passa o fóton por meio de um detector super sensível, que não provoca distúrbio apreciável no fóton?

Essa situação está representada na Fig. V.4. A cada fóton que entra no interferômetro, podemos medir sua presença no detector D_3 ou não. Se medirmos, vemos que ele tomou o caminho A; senão, inferimos que ele foi por B. Temos assim conhecimento sobre a trajetória do fóton, e o fenômeno é corpuscular. Mas se todos os fótons terminarem em D_1 , isso só pode ser explicado através de um modelo ondulatório. Teríamos assim violado a dualidade onda-partícula?

Não! O que acontece é que não ocorre mais interferência após S_2 ! Se o caminho tomado pelos fótons for medido, eles deixam de interferir como onda, e passam a ser detectados em D_1 (50%) e D_2 (50%)!

Como que as diferentes interpretações que já introduzimos (ver seção IV.3) explicariam este acontecimento?

(1) *Interpretação da Complementaridade* (Bohr). Um fenômeno não pode ser ao mesmo tempo (100%) onda e (100%) corpuscular. Quando medimos a posição do fóton, o fenômeno registrado é corpuscular, e assim não pode mais haver interferência.

(2) *Interpretação da Dupla Solução* (de Broglie, D. Bohm). A presença do detector D_3 , ligado em A, provoca um distúrbio na fase do trem de onda que ruma por A. A onda continua que ruma por A passa assim a ter uma fase diferente, desconhecida, e assim não podemos prever que tipos de superposição ocorrerão após S_2 (Fig. V.5).

(3) *Interpretação Ondulatória* (Schrödinger, von Neumann). A maneira mais simples de explicar o que acontece é fazer uso da noção de "colapso", que exploraremos no capítulo seguinte. Sempre que uma medição é realizada, e um resultado obtido, a onda ψ , previamente espalhada, sofre uma redução súbita, passando a se localizar próxima de onde ela foi detectada (formando um "pacote de onda" que parece uma partícula). Assim se o detector D_3 registrar um fóton, a onda some no caminho B; se D_3 não registrar nada, a onda some em A e passa a existir só em B. Schrödinger não gostava deste tipo de explicação envolvendo colapsos, e neste caso poderia usar a explicação dada em (2) que considera a introdução de fases aleatórias no trem de onda que ruma por A. Acontece, porém, que a noção de colapso terá que ser usada para explicar o fenômeno corpuscular das Figs. V.1 ou V.2.

Para finalizar esta seção, devemos mencionar que os detectores de fótons no espectro visível normalmente *absorvem* o fóton (por exemplo, através de algum efeito fotoelétrico), destruindo-o. Assim, o experimento que

descrevemos nesta seção não funcionaria quando o fóton passasse pelo caminho A, apenas quando ele passasse por B.

Para contornar esta limitação, passaremos no capítulo seguinte a considerar um experimento envolvendo átomos ao invés de fótons. Vale salientar também que um experimento análogo ao de Mach-Zehnder, para partículas individuais, já foi realizado para elétrons e nêutrons, com resultados qualitativamente idênticos.

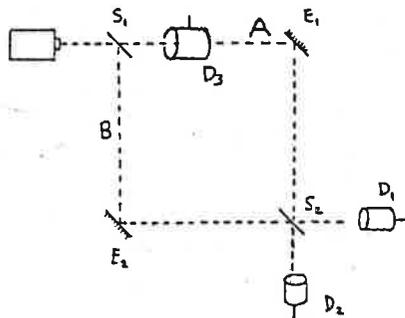


Figura V.4. Se um detector D_3 registrar a passagem de fótons por A sem destruí-los, os fótons não rumam mais apenas para D_2 (fenômeno ondulatório), mas se distribuem igualmente entre D_1 e D_2 , constituindo um fenômeno corpuscular (já que sabemos a trajetória completa do fóton).

6. Experimento de Escolha Demorada

Ao estudarmos o interferômetro de Mach-Zehnder, vimos que a única diferença entre os fenômenos ondulatório e corpuscular que descrevemos (Figs. IV.3 e V.2) é a presença ou não do espelho semi-refletor S_2 . Até que instante o cientista pode escolher entre deixar ou retirar S_2 , de forma a fazer o fenômeno ser ondulatório ou corpuscular? Pode ele esperar o fóton passar pelo

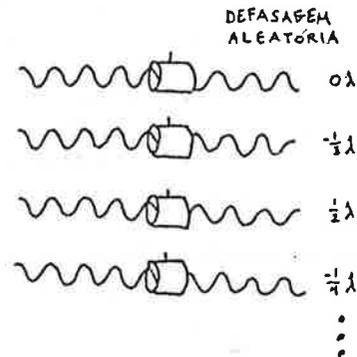


Figura V.5. Pode-se explicar a figura anterior supondo que a medição em D_3 provoca um distúrbio incontrolável no objeto quântico, alterando localmente a fase da componente de onda em A. Conforme o valor desta defasagem, uma superposição diferente ocorre em S_2 , levando à distribuição de probabilidades de 50%-50% na média.

primeiro espelho semi-refletor (S_1) para daí então escolher qual fenômeno vai acontecer? Sim! Tal escolha pode ser feita até o momento em que o pacote de onda associado ao fóton chega a S_2 .

Vamos agora então examinar algumas conseqüências deste *experimento de escolha demorada* para as diferentes interpretações que já conhecemos. Quem estudou este problema dentro da interpretação da complementaridade, usando o interferômetro de Mach-Zehnder, foi o físico norte-americano John Wheeler, na década de 1980. Já em 1931, porém, o alemão Carl von Weizsäcker havia descrito um experimento deste tipo, usando a idéia do microscópio de raios gama de Heisenberg.

Para tanto, consideremos alguns instantes temporais ao longo do percurso do fóton, na montagem da Fig. V.6. No instante t_1 , o fóton incide em S_1 ; em t_2 , ele se encontra dentro do interferômetro; em t_3 ele passa pela posição do espelho semi-refletor S_2 ; em t_4 ele se aproxima do detector; em t_5 ele gera um sinal macroscópico no osciloscópio.

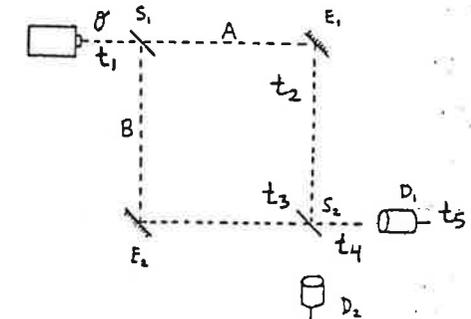


Fig. V.6. Interferômetro de Mach-Zehnder para um fóton, onde estão assinalados os instantes nos quais este passa por diferentes regiões.

O que diz a interpretação da complementaridade no instante t_2 , quando o fóton está dentro do interferômetro? Nada! Não se pode dizer nem que o objeto quântico é onda, nem que ele é partícula. Só quando o "fenômeno" se completa, e um registro macroscópico é obtido no aparelho de medição, no instante t_5 , é que se pode dizer qual é o fenômeno (onda ou partícula), e que se pode dizer o que estava acontecendo no passado, no instante t_1 !

Que estranho! No mundo da Física Quântica, segundo a interpretação da complementaridade, pode acontecer de *o passado se atualizar no presente!* Essa propriedade estranha não surge nas interpretações realistas, para as quais um estado de coisas em um instante t_2 permanecerá fixo no passado.

Quanta Filosofia! Mas este curso não era um curso de Física? Pois é, acreditamos que para entender a Física Quântica hoje em dia é preciso tecer

considerações filosóficas, e levar em conta que existem diferentes interpretações, todas consistentes e adequadas para descrever os fatos observados, mas todas com certas "anomalias" conceituais insuperáveis. Acabamos de ver uma anomalia da interpretação ortodoxa.

A Tabela abaixo resume como cada uma das três interpretações que examinamos descreve esse experimento de escolha demorada:

	COMPLEMENTARIDADE		DUPLA SOLUÇÃO	ONDULATÓRIA
t_1	Fóton está em \mathcal{C} .		Partícula e pacote da onda piloto estão em \mathcal{C} .	Pacote de onda está em \mathcal{C} .
t_2	(nada pode-se dizer)		Onda piloto se divide em dois, e partícula escolhe um caminho, A ou B.	Pacote de onda se divide em dois componentes, A e B.
t_3	Escolhemos pôr ou retirar S_2 . ↓ ↓		Escolhemos pôr ou retirar S_2 .	Escolhemos pôr ou retirar S_2 .
t_4	ONDA Detecção em D_1 .	PARTÍCULA Detecção em D_1 ou D_2 .	Detecção da partícula. No caso sem S_2 sobra uma onda vazia.	Detecção. No caso sem S_2 ocorre um colapso não-local.
t_5	Em t_2 havia uma onda.	Em t_2 , havia uma partícula em A ou B.	Passado não muda!	Passado não muda!

Capítulo VI

Colapso ou Redução de Estado

1. Probabilidade

A esta altura, podemos salientar um traço da Teoria Quântica que certamente já saltou aos olhos do leitor. Considere o experimento simples de anti-correlação da Fig. V.1. Quando um fóton incide na aparelhagem, *não é possível prever* se ele será detectado em D_1 ou em D_2 . Assim, a Teoria Quântica só pode nos informar, neste caso, que a probabilidade de cair em D_1 é $\frac{1}{2}$, e de cair em D_2 também é $\frac{1}{2}$. De modo geral, a Teoria Quântica fornece:

(i) Os *valores possíveis* de uma grandeza que está sendo medida (no nosso exemplo, a grandeza sendo medida é a *posição* do fóton em um certo instante, e os valores possíveis são r_{D_1} e r_{D_2} , ou seja, as posições dos detectores).

(ii) As *probabilidades* de se medir cada um dos valores possíveis (no caso, $\text{Prob}(r_{D_1}) = \frac{1}{2}$, e $\text{Prob}(r_{D_2}) = \frac{1}{2}$).

2. O Experimento de Stern-Gerlach

No final de 1921, um novo efeito quântico foi descoberto por Otto Stern e Walter Gerlach, na Universidade de Frankfurt. Um fino feixe de átomos de prata foi produzido por evaporação em um forno e colimado por duas fendas em série, passando então (em alto vácuo) entre os pólos de um eletro-ímã que gera um campo magnético não-homogêneo. Os átomos foram coletados em uma placa de vidro (Fig. VI.1).

Cada átomo de prata pode ser imaginado como um pequeníssimo ímã, com o eixo dos seus pólos norte-sul apontando em qualquer direção. De acordo com a Física Clássica, cada um desses mini-ímãs sofre uma força na direção vertical ao passarem pelo eletro-ímã, sendo que a magnitude desta força (seu módulo e sentido) depende da orientação do eixo do átomo (Fig. VI.2a). Como os átomos estão orientados ao acaso, esperaria-se que eles formassem uma mancha alongada e contínua no vidro (Fig. VI.2b).

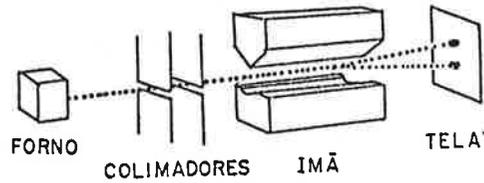


Figura VI.1. Experimento de Stern-Gerlach para átomos de prata. Note que na tela formam-se duas manchas separadas ao invés de uma mancha contínua.

No entanto, constatou-se a formação de duas manchas bem separadas, ao invés de uma mancha contínua! Eis mais um efeito quântico! Como entendê-lo? Não tentaremos explicá-lo aqui, mas vamos simplesmente apontar que tal efeito é semelhante à observação de que os níveis energéticos do átomo são discretos (assunto a ser explorado em capítulo posterior). No caso, a grandeza que assume valores discretos não é a energia, mas o *componente vertical do momento angular* (lembrando que este “momento angular” de um elétron desemparelhado dentro do átomo é proporcional ao campo magnético gerado pelo mini-ímã). É como se os mini-ímãs (os átomos) só pudessem ser observados com seus pólos magnéticos alinhados verticalmente (ao longo de um eixo z), para cima (com um valor $+\frac{1}{2}$) ou para baixo (com valor $-\frac{1}{2}$). Elétrons individuais também atuam como pequenos ímãs, mas neste caso seu momento angular é chamado de “spin”, e é inexplicável pela Física Clássica. Usaremos a palavra *spin* de agora em diante para designar tanto o momento angular de um átomo como o de um elétron.

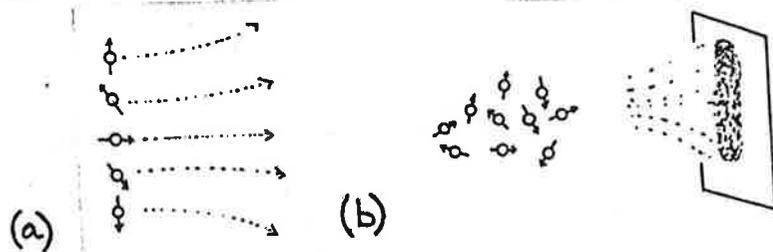


Figura VI.2. (a) O módulo da deflexão vertical sofrida pelo átomo de prata dentro do eletro-ímã depende da componente vertical do seu dipolo magnético. (b) Como os dipolos dos átomos estão orientados ao acaso, esperaria-se que a mancha formada por eles fosse contínua, segundo a Física Clássica.

Podemos notar que o efeito exercido pelo eletro-ímã de Stern-Gerlach no feixe de átomos é semelhante ao efeito exercido pelo espelho semi-refletor no feixe de luz. Ele divide o feixe de átomos em dois componentes espacialmente separados. Há porém uma diferença com o caso do espelho semi-refletor: cada componente está associado a um componente de spin (momento angular) diferente: ou $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$. O que faremos na seção seguinte é mostrar como é possível diferenciar os átomos que saem para cima no aparelho de Stern-Gerlach ($+\frac{1}{2}$ na direção z) dos átomos que saem para baixo ($-\frac{1}{2}$ na direção z).

3. Aparelhos de Stern-Gerlach em Sucessão

Como sabemos que os átomos que foram detectados na mancha de cima têm de fato alguma propriedade (o componente z do spin) diferente dos átomos que foram detectados em baixo? Ora, é só colocar dois ímãs de Stern-Gerlach em sucessão, conforme mostrado na Fig. VI.3. Os átomos que passam pelo primeiro ímã SG_1 , sobem (correspondendo a componente de spin $+\frac{1}{2}$), e incidem no segundo ímã SG_2 sempre terminam no detector D_{11} , que também corresponde a $+\frac{1}{2}$, e nunca no detector D_{12} .

Isso mostra - se o leitor se recorda da definição de estados ortogonais, da seção IV.4 - que existem pelo menos dois estados *ortogonais* envolvendo o spin dos átomos de prata. Chamaremos esses estados de $|\sigma_{+z}\rangle$ e $|\sigma_{-z}\rangle$. Eles são ortogonais porque se um átomo estiver no estado $|\sigma_{+z}\rangle$, com spin apontando para cima na direção z , ele nunca será registrado no detector D_2 colocado em baixo.

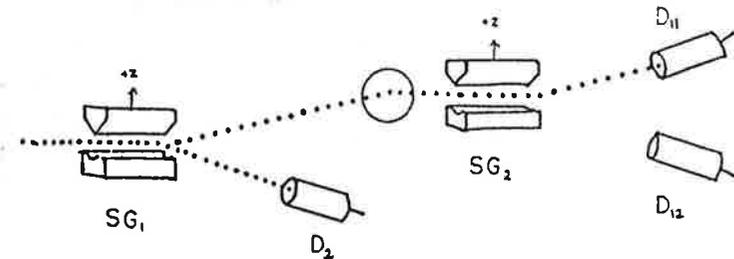


Figura VI.3. Dois aparelhos de Stern-Gerlach em sucessão.

4. Exemplo do Cálculo Quântico de Probabilidades

Recordemos agora o princípio quântico de superposição (seção IV.4): dados dois estados possíveis para um sistema, a sua soma também é um estado possível. O que seria a soma de $|\sigma_{+z}\rangle$ e $|\sigma_{-z}\rangle$? Seria o estado em que o spin da partícula (seu dipolo magnético) está apontando na direção $+x$, perpendicular a z e à direção y de propagação do átomo. Vamos agora escrever este estado, introduzindo "coeficientes de normalização" apropriados. Mais tarde veremos o significado desses coeficientes.

$$|\sigma_{+x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma_{+z}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma_{-z}\rangle \quad (\text{VI.1})$$

Pois bem, o que acontece quando um átomo no estado $|\sigma_{+x}\rangle$ da eq. (VI.1) entra no aparelho de Stern-Gerlach? Classicamente, ele não deveria sofrer deflexão alguma, mas no caso quântico (que é a realidade!) ele tem iguais probabilidades de terminar no detector de cima (D_1) e de baixo (D_2).

Como poderíamos calcular essas probabilidades, de acordo com a Mecânica Quântica? Ao invés de fornecer uma fórmula, e iniciar uma complicada discussão matemática, basta olhar para os coeficientes da eq. (VI.1) e elevá-los ao quadrado. Assim, a probabilidade de detectar o átomo no detector D_1 associado ao *auto-estado* $|\sigma_{+z}\rangle$ é simplesmente o quadrado de $1/\sqrt{2}$, que é $1/2$.

5. Exemplo de Redução de Estado

E qual é o estado do átomo após completado a medição? No experimento original de Stern-Gerlach, o átomo gruda na tela de vidro, e fica complicado dizer qual é seu estado. É possível, porém, mudar de detector, e utilizar um que não absorve ou destrói o objeto quântico.

Um exemplo de tal detector é a *câmara úmida* (ou de nuvens) desenvolvida pelo inglês C.T.R. Wilson no começo do século. Quando uma partícula está adentrando esta câmara, que contém ar e vapor d'água, uma expansão súbita é realizada, permitindo a formação de uma verdadeira nuvem. As condensações de água que constituem essa nuvem se formam preferencialmente em torno de moléculas gasosas que foram "ionizadas" (perderam um elétron) pela passagem da partícula incidente. Dessa maneira, a trajetória da partícula é registrada a nível macroscópico.

Pois bem, se tal detector funcionar com os átomos de prata, podemos medir a componente de spin de um átomo (Fig. VI.4), e depois realizar uma outra medição para checar se o mesmo valor é novamente obtido. Ora, mas vimos na seção VI.3 que é justamente isso que acontece.

Assim, após a primeira medição, se o valor $+1/2$ foi obtido para a componente z do spin, podemos ter certeza que o estado agora é $|\sigma_{+z}\rangle$ (pois numa medição subsequente o resultado será $+1/2$ novamente, com probabilidade 1).

Aqui podemos reparar que houve uma transição de estados: passamos do estado $|\sigma_{+x}\rangle$, antes da medição, para o estado $|\sigma_{+z}\rangle$ após a medição. Essa transição é conhecida como *redução de estado* ou *colapso*, e a lei que descreve essa transição foi formalizada por von Neumann, sendo conhecida por Postulado da Projecção.

6. Recombinação de Feixes

Na Fig. VI.4 representamos esquematicamente a redução de estado que ocorre durante a medição. Se pensarmos de acordo com a interpretação ondulatória, temos inicialmente uma onda que se divide em duas componentes no imã de Stern-Gerlach. Quando ocorre a detecção em D_1 , o componente em D_2 desaparece, e a onda sofre um colapso.

Agora, porque somos obrigados a considerar que essa onda se divide em dois componentes? Não podemos pensar que o átomo já "escolhe" se ele vai subir ou descer, ao sair do imã? Bem, se adotarmos a interpretação da complementaridade, podemos dizer, após a medição em D_1 , que o fenômeno é corpuscular, e que portanto a partícula pode ser vista como tendo um spin bem definido na direção z logo após deixar o imã.

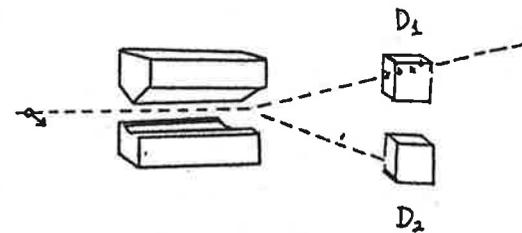


Figura VI.4. Experimento de Stern-Gerlach com câmaras úmidas que detectam a passagem da partícula sem alterar o valor do spin.

Mas e antes da medição em D_1 ? Podemos dizer que a partícula já possui spin bem definido na direção z ? Não! Porque? Pela mesma razão que vimos quando descrevemos o interferômetro de Mach-Zehnder. Porque é possível (lembre do experimento de escolha demorada) retirar rapidamente os detectores D_1 e D_2 e *recombinar* os componentes. Se isso for feito de maneira precisa, o estado final será novamente $|\sigma_{+x}\rangle$ (Fig. VI.5).

Portanto, o estado depois da passagem pelo ímã mas antes da medição é ainda descrito pela eq.(VI.1) (uma pequena modificação deveria ser introduzida para descrever a separação espacial dos componentes, mas ignoraremos isso).

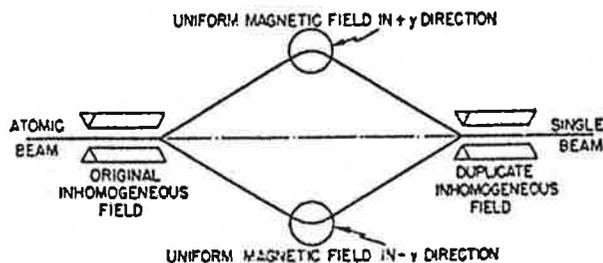


Figura VI.5. Experimento de Stern-Gerlach revertido, conforme a concepção de David Bohm (1951).

7. O Que é Responsável pelo Colapso?

Nos exemplos vistos, o colapso ou redução de estado é ocasionado pelo ato da medição. Esta é uma idéia introduzida por Heisenberg, e desenvolvida por von Neumann, em sua interpretação que mistura complementaridade com ondulatória. Enquanto não ocorre uma medição ou observação, não há colapsos!

Consideremos um exemplo adicional, envolvendo a câmara úmida (Fig. VI.6). Quando uma radiação é emitida, por exemplo em um decaimento radioativo, o estado é representado por uma onda esférica espalhada no espaço (para dar conta dos efeitos de interferência). Porém, após provocar uma primeira ionização na câmara úmida, a onda sofre um colapso, reduzindo-se a

um pacote nas vizinhanças da ionização. Aí, a onda começa a espalhar-se, até haver nova ionização. O que resulta é uma trajetória quase linear de condensações.

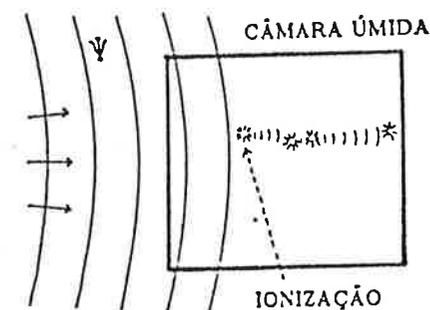


Figura VI.6. Colapso em uma câmara úmida de Wilson.

Aceitando que o ato de medição é uma condição suficiente para haver colapso, somos levados a perguntar o que caracteriza uma medição, que estágio da medição é a responsável pelo colapso? Isso é às vezes chamado de “problema da medição”, e é uma das questões mais debatidas nos Fundamentos da Mecânica Quântica. Eis alguns candidatos a resposta:

- (i) A consciência do observador (London & Bauer, 1939).
- (ii) A amplificação e o resultante registro macroscópico (Jordan, 1949; Ludwig, 1953).
- (iii) A mera interação do objeto com os átomos do detector, antes da amplificação.
- (iv) A interação do objeto com o meio ambiente.

8. Subjetivismo e o Paradoxo do Gato

A posição (i) resumida acima, a idéia de que é o observador consciente que provoca o colapso, tem sido muito divulgada em livros de divulgação da Física Quântica para o grande público. Ela é chamada de visão *subjetivista*, podendo ser enquadrada na interpretação ondulatória (para a qual a noção de colapso faz mais sentido) ou da complementaridade.

Um famoso argumento usado contra o subjetivismo foi elaborado por Schrödinger em 1936, sendo conhecido como o *paradoxo do gato de Schrödinger*. Adaptando-no um pouco, considere que dentro de uma caixa fechada existe um pequeno aparelho de Stern-Gerlach, e que apenas um átomo passa por ele. Se ele terminar caindo em D_1 , um “dispositivo diabólico”

mataria o gato, enquanto que este permaneceria vivo se o átomo terminasse em D_2 . Qual seria o estado do gato após um tempo suficiente para fazer o dispositivo funcionar?

De acordo com a visão subjetivista, como nenhum observador está presente, não ocorre colapso, e resulta assim que o gato se encontraria em uma superposição de gato-vivo e gato-morto (Fig. VI.7). Quando finalmente alguém olhasse, ocorreria o colapso, e apenas um gato bem definido (vivo ou morto) seria observado. Esta solução porém soa absurda, já que nossa noção intuitiva de um objeto clássico é que ele não existe em tais superposições e que seu estado macroscópico não é afetado pelo ato de observação.

Hoje em dia a visão subjetivista tem poucos adeptos. Para resolver o paradoxo do gato, basta considerar que o processo de amplificação - que ocorre a partir do instante em que o átomo incide no detector - já é uma condição suficiente para haver colapso (porém, talvez não seja uma condição necessária).

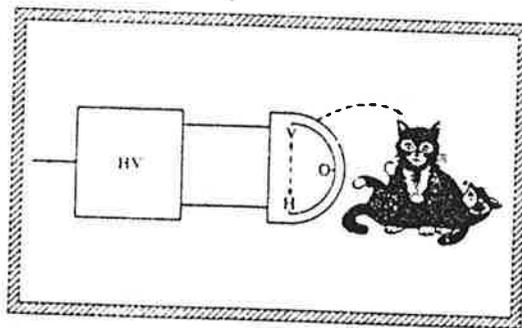


Figura VI.7. Representação artística do paradoxo do gato de Schrödinger.

9. Interpretações do Estado Quântico

Agora que começamos a trabalhar com o estado definido pelo formalismo quântico, podemos inquirir como cada visão interpreta um estado $|\psi\rangle$. Aproveitaremos inclusive para introduzir a quarta grande corrente interpretativa da Física Quântica.

1) *Interpretação Ondulatória*. Interpreta $|\psi\rangle$ de maneira "literal", atribuindo realidade ao estado ou à função de onda, e sem postular que exista nada além do que descreve o formalismo quântico. Mas que espécie de realidade é essa? Não é uma realidade "atualizada", que possamos observar

diretamente. É uma realidade intermediária, uma *potencialidade*, que estabelece apenas possibilidades, mas que mesmo assim evolui no tempo como uma onda. (Essa noção de potencialidade também é usada por proponentes das visões 2 e 4, a seguir.)

2) *Interpretação da Complementaridade*. Também não postula nada além do formalismo, mas considera que o estado $|\psi\rangle$ é meramente uma instrumento matemático para realizar cálculos e obter previsões (esta visão chama-se *instrumentalismo*). Porém, considera que o estado quântico seja a descrição mais "completa" de um objeto quântico individual.

3) *Interpretação da Dupla Solução*. Considera que existam "variáveis ocultas" por trás da descrição em termos de estados, variáveis essas que são as posições das partículas. O estado $|\psi\rangle$ seria assim uma descrição essencialmente estatística, que representa a média sobre todas as posições possíveis da partícula (em linguagem técnica, representa um coletivo ou ensemble estatístico). A descrição através do estado quântico seria incompleta, só se completando com a introdução dos parâmetros ocultos.

4) *Interpretação dos Coletivos Estatísticos*. Essa é uma visão que ainda não discutimos, e que é próxima à posição de Einstein sobre o assunto. Ela concorda com (3) que o estado $|\psi\rangle$ descreve apenas uma média sobre todos os estados que podem ser preparados por um procedimento experimental. Assim, esta visão não considera que o estado quântico represente uma descrição completa de um objeto individual. Porém, esta interpretação não entra em detalhes sobre como seria possível completar a Mecânica Quântica, apesar de ela ser simpática a um modelo corpuscular da natureza.

Capítulo VII

Ondas em Duas e Três Dimensões

1. Introdução às Ondas em 2 e 3 Dimensões

Neste capítulo, vamos continuar a explorar intuitivamente as ondas, continuando a discussão do cap. III, só que examinando ondas em mais de uma dimensão. Todos os fenômenos ondulatórios a serem examinados podem ser associados a partículas únicas, fornecendo diferentes exemplos de fenômenos quânticos (conforme explicado nas seções II.1 e II.5).

Na superfície da água, se um objeto pequeno agir como uma fonte de onda e começar a oscilar com uma frequência determinada, surge um trem de ondas circular que se propaga para fora. Em classe, vemos isso em uma "cuba de ondas". Tal onda circular está ilustrado na Fig. VII.1 (em 3 dimensões, teríamos uma onda esférica), onde as linhas correspondem às cristas das ondas. Se o objeto que oscila na superfície da água for reto e longo, o padrão das ondas aproximará uma onda reta, como o da Fig. VII.2 (em 3 dimensões, onda plana).

Fig. VII.1. Onda circular, de comprimento de onda λ , em uma cuba de ondas. O diagrama ao lado analisa este tipo de onda em termos do princípio de Huygens.

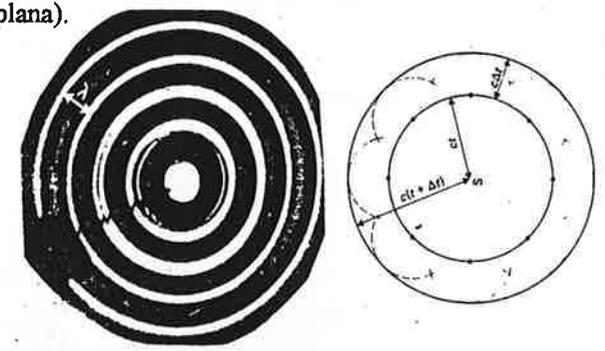
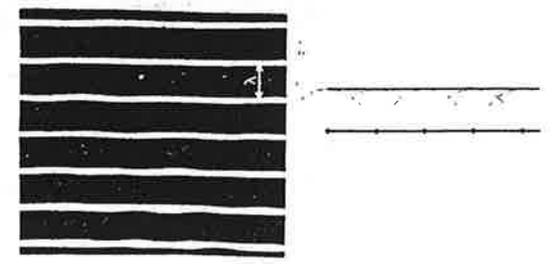


Fig. VII.2. Onda reta na superfície d'água, em uma cuba de ondas.



Uma maneira de entender a forma dessas ondas foi formulada pelo grande físico holandês Christian Huygens, contemporâneo de Newton e defensor da tese de que a luz consiste de ondas. O chamado *princípio de Huygens* consiste de duas partes: (i) Cada ponto que oscila periodicamente (devido por exemplo à chegada de uma frente de onda) age como uma nova fonte de onda ("ondas secundárias"), que se propaga de maneira circular. (ii) A frente de onda em um instante posterior é descrita pela linha que toca tangencialmente cada uma das ondas secundárias (ver desenhos nas Figs. VII.1 e 2).

2. Reflexão e Refração

Dentre os fenômenos que podem ser facilmente explicados tanto para corpúsculos quanto para ondas estão a reflexão e a refração. A *reflexão* de ondas em molas foi examinada na seção III.4, e sua ocorrência em uma cuba de onda está ilustrada na Fig. VII.3. *Ondas estacionárias* podem também ser observadas, por exemplo ao colocar uma parede circular em torno de uma fonte pontual, conforme mostrado na Fig. VII.4. O raio desta parede circular deve ter um comprimento $n\lambda/2$ (para n inteiro) para que o padrão de ondas seja estacionário.

Outro fenômeno interessante que ocorre em 2 e 3 dimensões é a *refração*. Ela ocorre quando, por algum motivo, a velocidade da onda se altera. Em uma cuba de ondas, a velocidade das ondas diminui quando a profundidade da água é diminuída, como quando um pedaço de vidro é colocado no fundo da cuba (Fig. VII.5). Como a frequência ν das ondas não se altera, o comprimento de onda λ varia juntamente com a velocidade V , diminuindo quando a velocidade diminui (lembramos da eq. III.1: $\nu \cdot \lambda = V$). Quando a fronteira entre os dois meios não é paralela à frente de onda, a mudança no comprimento de onda faz com que a direção de propagação das

Figura VII.3. Reflexão de ondas retas (esquerda) e circulares (direita) em uma cuba de ondas.

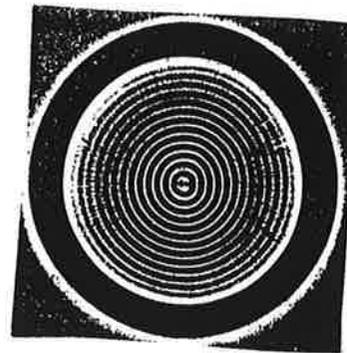
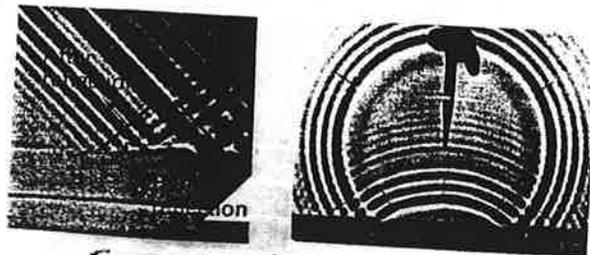


Figura VII.4 Ondas estacionárias em uma cuba. Esta é uma foto de longa exposição, de forma que as ondas não estacionárias fora do anel não aparecem.



Figura VII.5. Ao passar de uma água mais funda (em baixo) para uma mais rasa, a velocidade diminui na mesma proporção que os comprimentos de onda: λ_2/λ_1 .

ondas se altere (Fig. VII.6). Para prever qual será a direção de propagação no novo meio, basta fazer um desenho que satisfaça dois requisitos: (i) as cristas de ondas nos dois meios se mantêm ligadas, sem defasagem; (ii) o comprimento de onda no segundo meio tem o valor calculado segundo exposto acima.

Curiosamente, o fenômeno da refração também pode ser observada para partículas: ao passarem de um meio para outro no qual sua velocidade se altera, ocorre uma mudança de direção de propagação.

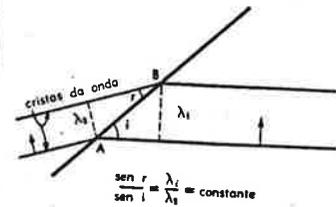
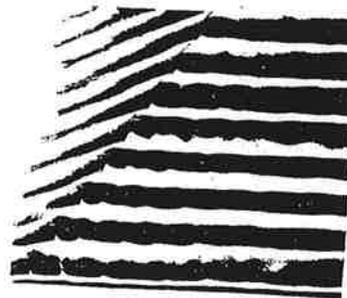


Figura VII.6. Foto de uma cuba de ondas, exibindo refração, acompanhada de um desenho explicativo, relacionando os ângulos i e r entre frentes de onda e fronteira.

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{constante}$$

3. Difração e Interferência

Segundo o princípio de Huygens, se uma onda atingir uma parede na qual há apenas um furinho bem pequeno (menor do que λ), a onda secundária gerada naquele furo resultará em uma onda circular (ou esférica) (Fig. VII.7). Pelo mesmo raciocínio, se uma onda plana na superfície d'água bater em um anteparo parcial como o da Fig. VII.8, a onda tenderá a contornar a ponta do anteparo. Esses são exemplos de *difração*, que ocorre quando parte de uma onda muda de direção ao atravessar uma abertura ou contornar um obstáculo. Este é um fenômeno tipicamente ondulatório que ocorre em 2 e 3 dimensões, exibido pela luz e pelo som, e que não pode ser explicado para partículas (isso será em parte possível invocando o princípio de incerteza, conforme veremos no capítulo seguinte).

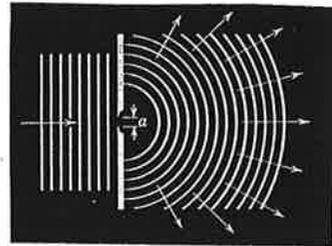
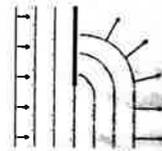


Figura VII.7. Difração de uma onda reta por meio de uma fenda pequena, da ordem do comprimento de onda. Para fendas cada vez menores, as intensidades em todas as direções radiais tornam-se cada vez mais iguais.



Figura VII.8. Difração de uma onda reta em um anteparo parcial. A foto foi tirada em um tanque de ondas da Hydraulic Research Station em Wallingford, CT, EUA, apresentando ondas de 3 metros de altura com períodos de 8 segundos.



Quando uma onda passa por dois furos em uma parede, as duas ondas circulares que são geradas (de acordo com o princípio de Huygens) irão, naturalmente, se superpor. Uma característica interessante, porém, é que a superposição destrutiva (ou contrutiva) que ocorre em certos pontos é constante no tempo. Quando os efeitos de superposição de ondas forem constantes no tempo, e não apenas transientes, eles são chamados de *interferência*. Na cuba de ondas, duas ondas circulares podem também ser geradas por um par de pontas oscilantes, como na Fig. VII.9, onde as oscilações têm mesma frequência e estão em fase. Nessa figura, as regiões pretas podem ser vistas como depressões e as regiões brancas como cristas das ondas. Repare as linhas cinzentas que dividem radialmente a figura: são chamadas de "linhas nodais", e correspondem a regiões em que a água fica parada, devido à superposição destrutiva.

No caso da luz, só podemos observar o padrão que se forma em uma tela ou chapa fotográfica (ver Fig. II.1), e nestes observa-se que regiões claras e escuras se alternam. Em classe, vimos padrões de interferência gerados por uma fonte de luz laser passando por duas fendas próximas. Descobrimos, porém, que havia dois padrões que se superpunham: um padrão de *difração*, mais largo, devido à passagem da luz por apenas uma fenda de espessura finita (ou seja, a fenda não é pontual); e um padrão de *interferência*, mais estreito, devido à existência de duas fendas (Fig. VII.10).

Para uma onda de comprimento λ , se a separação entre duas fendas pontuais for d , mostra-se que a intensidade do padrão de interferência, em função do ângulo θ é proporcional a $\cos^2(\pi d \theta / \lambda)$ para θ pequenos. Assim, o

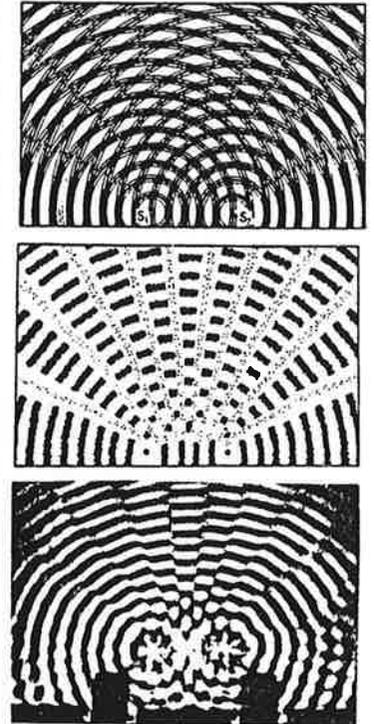


Figura VII.9. Em cima: A partir das duas fontes pontuais S_1 e S_2 , traçam-se círculos concêntricos representando as cristas das ondas. Centro: Onde ocorre superposição de círculos, desenha-se uma mancha preta; nos pontos de superposição destrutiva (linhas nodais), desenharam-se pontinhos. Em baixo: Foto de uma cuba de ondas.

ângulo $\Delta\theta_{\text{INT.}}$ entre dois mínimos adjacentes do padrão de interferência é dado (aproximadamente) por:

$$\Delta\theta_{\text{INT.}} \approx \lambda/d \quad (\text{VII.1})$$

Por outro lado, na difração de uma onda plana através de uma fenda única de espessura a , a uma grande distância da fenda (condição de Fraunhofer), mostra-se que a intensidade do padrão de difração é proporcional a $\text{sen}^2(\pi a \theta / \lambda) / (\pi a \theta / \lambda)^2$, de forma que a distância entre dois mínimos adjacentes (com exceção dos mínimos centrais, que estão separados pelo dobro deste ângulo - ver Fig. VII.10a) é dado (para θ pequenos) por:

$$\Delta\theta_{\text{DIF.}} \approx \lambda/a \quad (\text{VII.2})$$

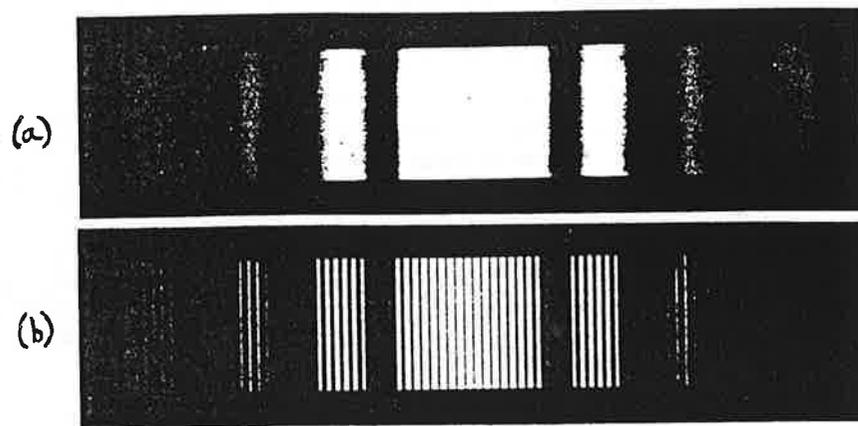


Figura VII.10. Padrões de difração luminosa por (a) uma fenda simples, e (b) por uma fenda dupla de mesma espessura que a anterior. Para a fenda dupla, o padrão da fenda simples é multiplicado por um padrão de interferência com mínimos (regiões escuras) igualmente espaçados. Note, porém, que o padrão de difração apresenta dois mínimos centrais separados por um ângulo duas vezes maior do o ângulo entre outros mínimos adjacentes.

A sombra que se forma por trás de objetos opacos também exemplifica a difração (Figs. II.2 e VII.11). As linhas claras que aparecem nessas figuras podem ser observadas diretamente se olharmos para uma fonte de luz (uma lâmpada de rua) e fecharmos nossos olhos de forma que nossos cílios fiquem na frente, difratando a luz.



Figura VII.11. Franjas de difração formadas na sombra de um alfinete.

4. Difração e Interferência para Elétrons

Na Fig. VII.12, mostramos o padrão de difração de raios X que atravessam um cristal de quartzo. Os pontos luminosos, é claro, corresponde a pontos de superposição construtiva em uma chapa fotográfica. Se ao invés de um cristal inteiro tivéssemos uma amostra em pó de um cristal (ou seja pequenos cristais orientados em diferentes direções), obter-se-ia um padrão de difração com anéis concêntricos. Tal figura poderia ser gerada pegando-se Fig. VII.12 e girando-a rapidamente em torno de seu centro.

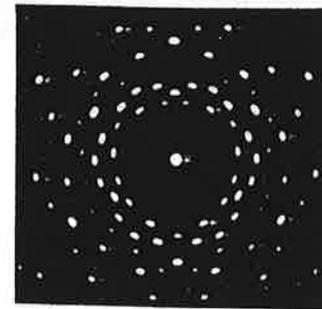


Figura VII.12. Padrão de difração de raios X através do cristal de quartzo.

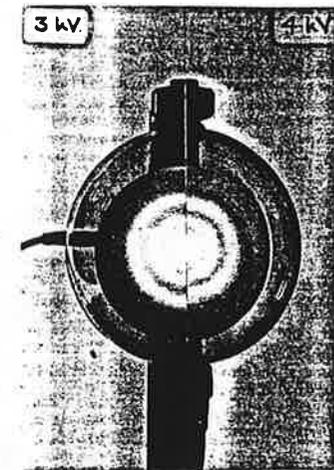


Figura VII.13. Foto composta mostrando padrões de difração de elétrons através de grafite, obtida por diferentes voltagens (energias).

É exatamente este tipo de padrão que se obtém em um experimento de difração de elétrons através de uma amostra de grafite (Fig. VII.13). Nesta amostra, cada camada atômica de grafite gera um padrão de pontos, como o da Fig. VII.13, mas como essas camadas bidimensionais estão orientadas em diferentes direções, resulta um padrão de círculos concêntricos. Este experimento exhibe diretamente o aspecto ondulatório do elétron! Na Fig. VII.13, percebemos que quanto maior a energia do elétron, menor os raios dos círculos. Levando em consideração a eq.(VII.1), vemos que uma diminuição em $\Delta\theta$ corresponde a uma diminuição no comprimento de onda λ dos elétrons. Pela eq.(I.2), ou seja, $\lambda = h/mV$, vemos que uma diminuição em λ só pode ser ocasionada por um aumento na velocidade V dos elétrons, ou seja, por um aumento de sua energia, como está indicado na figura.

O experimento de duas fendas para elétrons, análogo à montagem óptica de Young (Fig. II.1), é muito usado em “experimentos-de-pensamento” da Física Quântica (como vimos em um exercício em classe, e veremos na seção VIII.4), mas ele não é factível. Existe, porém, uma maneira de realizar um experimento de interferência para elétrons usando apenas um fio carregado positivamente para recombinar o feixe eletrônico (Fig. VII.14). Este experimento ficou conhecido como um “biprisma de elétrons”, em analogia ao biprisma óptico de Fresnel (Fig. VII.15).



Figura VII.14. Experimento com o biprisma de elétrons, realizado por Möllenstedt & Düker em 1954.

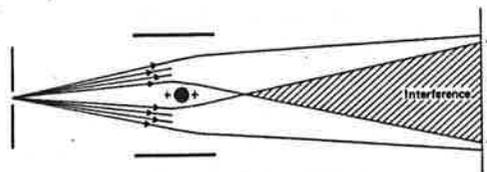


Figura VII.15. Experimento de interferência da luz com um biprisma, realizado por Fresnel.



6. Reflexão Interna Total Frustrada e Tunelamento Quântico

Temos enfatizado que a essência da Física Quântica é ela ser uma teoria que trata de fenômenos ondulatórios associados à presença (ou detecção) de partículas. Qualquer fenômeno óptico tem uma versão quântica, quando as intensidades da luz envolvida são muito baixas e fótons individuais podem ser discernidos pelos aparelhos de medição.

Como exemplo, consideremos a reflexão de luz que ocorre dentro de um prisma de vidro colocado no ar (Fig.VII.16). Para certos ângulos de incidência, parte da luz é refratada para o ar, parte é refletida. Acima de um certo ângulo crítico, porém, toda a luz é refletida, e temos a “reflexão interna total”.

O interessante vem agora! Se um outro prisma for colocado com uma face paralela à face de reflexão interna total do primeiro prisma, a uma distância bem pequena (mas sem encostar!), parte da luz deixará de ser refletida e propagará no outro prisma! Como isso é possível?

A Física Ondulatória Clássica explica *esta reflexão interna total frustrada* considerando que as ondas luminosas podem penetrar uma pequena distância dentro de uma barreira (no caso a barreira é a interface vidro-ar), sem porém se propagar nesse meio. Tais “ondas evanescentes” decaem exponencialmente na direção perpendicular à interface (Fig. VII.17). Quando, porém, o outro prisma é aproximado do primeiro, a onda evanescente penetra nele e passa a se propagar no segundo prisma, em intensidades bem baixas. Tal efeito pode também ser observado em uma cuba de ondas.

Quando consideramos que a luz consiste de fótons, passamos a imaginar partículas penetrando uma “barreira de potencial”, como se ali houvesse um túnel, e saindo pelo outro lado! Esse *tunelamento quântico* é bastante enigmático quando pensamos em termos de partículas clássicas, mas ele torna-se mais compreensível quando levamos em conta o aspecto ondulatório do objeto quântico. Imagine uma bolinha presa em um vale, oscilando pra lá e pra cá sem atrito. Para sair do vale, suplantando um pico, e descer morro abaixo (Fig. VII.18), a bolinha precisa ter bastante energia, e ao final sua velocidade será bastante grande. Com o tunelamento, a energia da bolinha pode ser bem baixa, e mesmo assim ela pode escapar! Isso explica, por exemplo, a emissão de partículas alfa por núcleos radioativos.

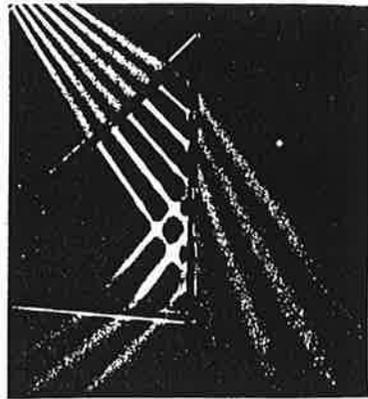


Figura VII.16. Reflexão interna total de raios luminosos dentro de um prisma de vidro pode ser observada no quinto e sexto feixes. Se um outro prisma for aproximado da face superior do primeiro (sem precisar encostar), a reflexão total será frustrada.

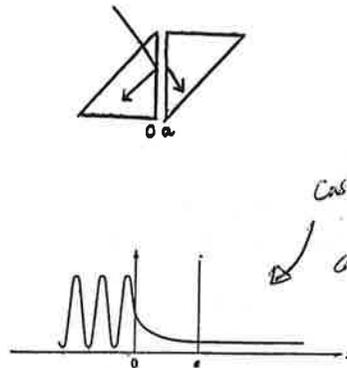


Figura VII.17. Gráfico das energias médias das ondas na reflexão interna total frustrada. A onda provinda da esquerda, dentro do prisma, reflete quase inteiramente, formando um padrão de ondas (quase) estacionárias. Na região com ar, a onda evanesce. Com o segundo prisma, na região em que ainda há onda evanescente, uma pequena amplitude de propagação passará a existir, para a direita (a linha horizontal significa que a onda tem amplitude constante).

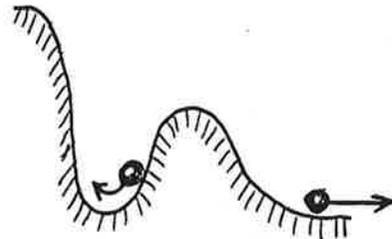


Figura VII.18 (à esquerda). Uma bolinha clássica que escapa de um vale acaba tendo uma velocidade bastante alta, correspondendo à energia cinética necessária para suplantarmos o morro. No efeito túnel, a energia final da bolinha pode ser bastante pequena!

Caso Unidimensional
nel, não
conter por isso
ao prisma!

Capítulo VIII

Explorando a Interferometria Quântica

1. Polarização

No Capítulo III, esquecemos de descrever uma propriedade importante das ondas transversais em uma dimensão. Uma onda em uma corda pode oscilar na vertical ou na horizontal: estas são duas direções ortogonais de polarização. Dizemos que elas são "ortogonais" porque qualquer alteração restrita à componente horizontal da onda não levará a alteração alguma na componente vertical. Elas são independentes.

Pode-se produzir um feixe de luz polarizado usando um filtro polarizador. Um feixe de luz inicialmente não-polarizado que passa por um polarizador tem sua intensidade reduzida à metade e oscila em apenas uma direção. Isso acontece porque as moléculas do filtro são bem compridas, todas alinhadas em uma direção; se a luz oscila ao longo da direção das moléculas, os elétrons destas moléculas absorvem a luz; se a luz oscila na direção perpendicular, ela passa. Isso pode ser verificado também usando-se uma grelha de fios metálicos para polarizar a radiação de microonda (Fig. VIII.1).

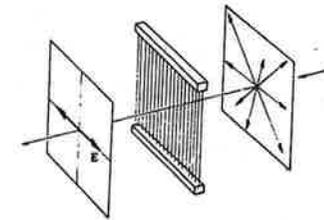


Figura VIII.1. Grelha polarizadora feita de fios metálicos paralelos usado para radiação de microonda. A polarização final é perpendicular à direção dos fios.

Considere um feixe de luz que já passou por um polarizador, oscilando em uma direção que chamaremos de 0° , e tendo uma intensidade I_0 . Ao passar por um outro filtro orientado a um ângulo θ , a intensidade final do feixe será (lei de Malus):

$$I_F = I_0 \cos^2 \theta \tag{VIII.1}$$

É fácil ver que para um ângulo de $\theta=90^\circ$, a intensidade transmitida será nula! Dois polarizadores ortogonais colocados em sucessão não deixarão passar nenhuma luz. Curiosamente, se um terceiro polarizador orientado a 45° for colocado entre os dois polarizadores ortogonais, alguma luz passará pelos polarizadores, numa intensidade $\frac{1}{4} I_0$ (Fig. VIII.2).

Existem prismas especiais que dividem um feixe luminoso em duas componentes de polarização ortogonais, sem absorver parte do feixe, como faz o filtro polarizador. Tais cristais "birrefringentes", como a calcite, desempenham um papel análogo ao eletro-ímã de Stern-Gerlach para spins, que vimos na seção VI.2.

O que acontece quando dois feixes polarizados em direções ortogonais se superpõem? Vamos imaginar que as ondas transversais de amplitude A estão se dirigindo a seus olhos, e você pode discernir a direção de oscilação das ondas (Fig. VIII.3). Se elas estiverem *em fase* (ou defasadas em $\frac{1}{2}$ ciclo), a onda resultante oscilará na direção 45° (ou 135°) com intensidade $\sqrt{2} A$. Se elas estiverem defasadas em $\frac{1}{4}$ de ciclo (ou $\frac{3}{4}$ de ciclo), a onda resultante será circularmente polarizada para direita ou para esquerda, com a mesma amplitude $\sqrt{2} A$ obtida anteriormente. Neste caso, ver-se-ia o vetor polarização descrever um movimento circular. Para outras defasagens, a polarização resultante é chamada de "elíptica".

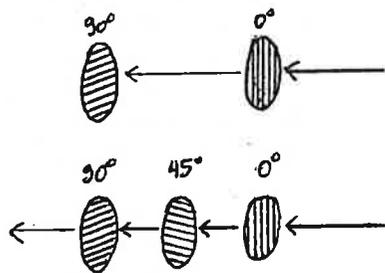


Figura VIII.2. Nenhuma luz passa por dois filtros polarizadores orientados em direções ortogonais, como 0° e 90° . Porém, quando um filtro a 45° é inserido entre os dois, pode-se calcular através da lei de Malus que $\frac{1}{4}$ do feixe acaba atravessando os filtros.

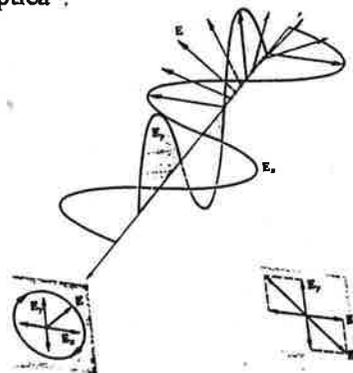


Figura VIII.3. Superposição de ondas polarizadas a 0° e a 90° . Se elas estiverem em fase, a onda resultante estará linearmente polarizada a 45° . Se elas tiverem uma defasagem de $\frac{1}{4}$ de ciclo, a onda resultante estará circularmente polarizada.

Em todos os casos, a intensidade do feixe superposto é o mesmo, sendo o dobro das intensidades dos componentes. Não há, portanto, no caso de superposição de ondas ortogonalmente polarizadas, superposição construtiva e destrutiva. Assim, não ocorrem fenômenos de interferência com componentes ortogonalmente polarizados!

2. Interferometria com Polarizadores

Ilustremos o que acabou de ser dito considerando um interferômetro de Mach-Zehnder no qual um polarizador orientado a 0° é colocado no caminho A e um a 90° em B (Fig. VIII.4). Deixará de haver superposições construtiva e destrutiva e, assim, 50% do feixe cairá no detector D_1 , 50% em D_2 .

Podemos neste caso considerar o fenômeno corpuscular? Bem, é verdade que com a montagem da Fig. VIII.4 não podemos determinar trajetórias, mas poderíamos determiná-las, em princípio. Por exemplo, se substituíssemos cada detector por um prisma birrefringente seguido de dois detectores (um para cada componente ortogonalmente polarizado saindo do prisma), poderíamos estabelecer as trajetórias. Este fenômeno, sem dúvida, é corpuscular. O da Fig. VIII.4 poderia também ser chamado de corpuscular, sem problemas.

Porém, lembremos que um fenômeno só se estabelece quando a medição se completa. Por exemplo, se, no instante que os feixes polarizados estão se aproximando de S_2 , filtros polarizados a 45° forem inseridos nos dois caminhos, as superposições construtiva e destrutiva voltam a ocorrer (Fig. VIII.4)! Todos os fótons transmitidos serão detectados em D_1 , nenhum em D_2 !

3. Interferômetro com Pé Giratória

Às vezes raciocinamos da seguinte forma: "se não sabemos qual é a trajetória, então o fenômeno é ondulatório e haverá interferência". Vimos na seção anterior, porém, um contra-exemplo disso (na Fig. VIII.4). Uma maneira de tornar esse raciocínio mais correto é a seguinte:

"se *em princípio* for impossível distinguir as trajetórias, então o fenômeno será ondulatório e haverá interferência".

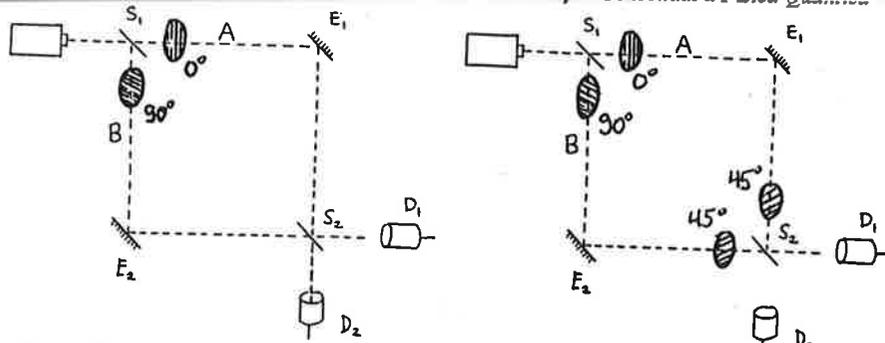


Figura VIII.4. Deixa de ocorrer interferência no interferômetro de Mach-Zehnder com polarizadores orientados ortogonalmente (0° e 90°).

Figura VIII.5. A interferência retorna quando polarizadores orientados a 45° são introduzidos.

Vejam um exemplo. Imagine que uma pá giratória é colocada após S_1 no interferômetro de Mach-Zehnder (Fig. VIII.6), de forma que quando o componente A se propaga, o componente B é bloqueado pela pá, e vice-versa. Cada pulso chegará em S_2 ou por A, ou por B, e não haverá interferência; 50% das contagens serão registradas em cada detector.

Bem, neste caso, *não sabemos* por onde foi a partícula, apesar de ela certamente ter seguido uma trajetória bem definida até chegar em S_2 . Mas podemos *em princípio distinguir* por qual trajetória um fóton detectado veio? Sim, desde que tivermos anotado quando a pá estava em uma posição ou em outra! É só marcar então o instante exato em que o fóton é detectado, calcular em que instante ele passou pela pá giratória, e checar qual era a posição da pá. Distinguiremos assim qual é a trajetória da partícula!

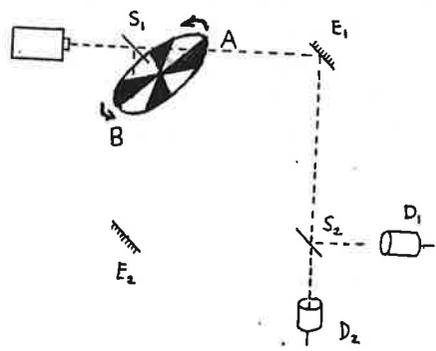


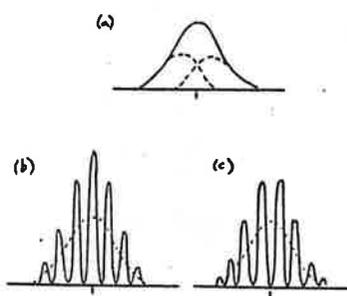
Figura VIII.6. Interferômetro com uma pá giratória. Apesar de não sabermos qual é a trajetória do fóton, podemos em princípio distinguir qual é esta trajetória.

4. Experimento de Duas Fendas Revisitado

Já mencionamos que o experimento de duas fendas para elétrons não é factível, apesar de existirem experimentos factíveis que são equivalentes às das duas fendas (seção VII.4). Mesmo assim, vamos explorar um pouco mais este experimento para fortalecer nossas intuições, seguindo um pouco a abordagem que o físico norte-americano Richard Feynman deu em seus famosos *Lectures*, publicados em 1964.

Vamos comparar o comportamento de partículas clássicas, como pedrinhas, com o comportamento de objetos quânticos, como elétrons. Se apenas uma fenda estiver aberta, o padrão de difração formado para os elétrons estará próximo ao padrão formado pelas pedrinhas, já que estas podem resvalar nos cantos da fenda e mudar de direção (linha tracejada na Fig. VIII.7a). Se as duas fendas estiverem abertas para as pedrinhas, o padrão resultante será a soma das intensidades obtidas para cada fenda aberta (Fig. VIII.7a).

No caso de elétrons, porém, sabemos que ocorrerá interferência, e o padrão na tela terá pontos de máxima intensidade e pontos de intensidade zero (Fig. VIII.7b). No ponto da tela detectora que está equidistante em relação às fendas, a distância percorrida pelas ondas de matéria é igual. Como as ondas estão em fase nas fendas, elas estarão em fase após percorrer caminhos iguais, e teremos superposição construtiva bem no meio do padrão na tela. Em um



ponto da tela um pouco deslocado em direção a uma das fendas, a superposição será destrutiva, pois um dos componentes de luz demora mais tempo para chegar do que o outro, no caso exatamente meio ciclo. E assim, constrói-se o padrão de interferência descrito pela eq. (VII.1).

Figura VIII.7. Padrões na tela detectora do experimento de duas fendas. (a) Comportamento corpuscular. (b) Comportamento ondulatório. (c) Comportamento ondulatório com defasagem de meio ciclo em uma das fendas. Note que o padrão de (b) mais o de (c) fornece 2 vezes o de (a).

Se logo após uma das fendas um defasador de $\frac{1}{2}$ ciclo for instalado, passaremos a ter superposição destrutiva bem no meio da tela detectora, e haverá um deslocamento do padrão (Fig. VIII.7c). O fenômeno, é claro, permanece ondulatório.

Vimos no exercício feito em classe, porém, que se uma lanterna for colocada atrás das fendas, de forma a medir por onde passou o elétron (Fig. VIII.8), as franjas de interferência desaparecerão, e teremos um padrão análogo ao que se obteria com pedrinhas (Fig. VIII.7a). Este medidor funcionaria assim: a lanterna mandaria fótons um por um que seriam recolhidos por um fotodetector de eficiência 100% (o que não é realista!). Quando um fóton deixasse de chegar no detector, saberíamos que ele foi espalhado por um elétron, e teríamos uma medição de posição do fóton. Usaríamos duas lanternas e dois fotodetectores, um para cada fenda.

Já vimos diferentes explicações para o desaparecimento do padrão de interferência na seção V.5, todos baseados na noção de que a medição sempre provoca um *distúrbio* incontrolável no objeto quântico. (1) A Interpretação da Complementaridade invoca o princípio de incerteza (que veremos no capítulo seguinte), de forma que a direção de propagação do elétron se altera de maneira incontrolável. (2) A Interpretação da Dupla Solução utiliza a noção de fases aleatórias, que estraga a interferência. (3) Uma Interpretação Ondulatória falaria em um colapso resultante da medição.

O que aconteceria agora se as lanternas fossem desligadas? O padrão voltaria, é claro. E se as lanternas permanecerem ligadas e os fotodetectores forem desligados? A-ha, e agora?... O padrão *não* voltaria!

Neste caso em que os fotodetectores estão desligados não podemos falar que houve um colapso, e assim a visão (3) teria que usar a explicação por fases aleatórias. Ela falaria que neste caso houve *decoerência* (pois a “coerência” da onda foi perdida com a introdução de uma fase aleatória), mas não necessariamente *colapso*. Ou seja, o objeto quântico passou a se comportar “classicamente”, como uma partícula, só que não se sabe por qual fenda ela passou.

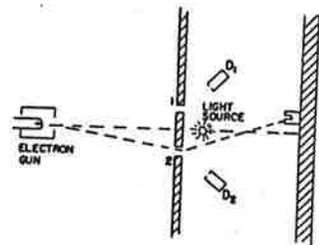


Figura VIII.8. Desenho do livro de Feynman (1964) no qual uma fonte de luz é usada para medir por qual fenda passou o elétron.

Capítulo IX

O Princípio de Incerteza

1. O Pacote de Onda

O princípio de incerteza, enunciado por Heisenberg em 1927, é considerado um dos resultados mais incríveis da Física Quântica. No entanto, um princípio análogo vale na Física Ondulatória Clássica, conforme explicaremos agora.

Para tanto, é preciso considerar um *pacote de onda*. Um pacote de onda em 1 dimensão é um pulso de onda mais ou menos bem localizado. É possível gerar um pacote de onda através da superposição de ondas contínuas se propagando na mesma direção e sentido, como aquelas da Fig. III.7 e 8. Um detalhe importante, porém, é que esses componentes de onda precisam ter comprimentos de onda levemente diferentes, além de terem amplitudes diferentes.

Isso está ilustrado na Fig. IX.1, na qual sete componentes senoidais diferentes são somadas, resultando na onda desenhada na parte de baixo da figura. Nesta resultante, podemos notar regiões em que as amplitudes máximas são bastante grandes, e regiões em que esses máximos são bem pequenos. Notamos também que as regiões de máximos se repetem periodicamente: a onda resultante não é assim um pacote de onda propriamente dito.

Se definirmos o número de onda κ como o inverso do comprimento de onda λ , ou seja, $\kappa = 1/\lambda$, podemos dizer que os componentes da figura possuem κ inteiros, variando de $\kappa = 9$ até 15. É possível representar isso em um gráfico de amplitude versus número de onda. Isso é feito na Fig. IX.2, que representa exatamente a mesma onda apresentada na Fig. IX.1, só que no “espaço dos κ ” ao invés de no espaço usual das posições.

Dito isso, podemos agora explicar como construir um verdadeiro pacote de onda. Se começarmos a intercalar ondas senoidais com κ 's intermediários, até formar uma soma contínua de ondas, obteremos uma região de máximo que não se repete mais (Fig. IX.3a). É difícil imaginar uma infinidade de ondas senoidais se somando, mas é fácil representar isso no “espaço dos κ ”: ao invés de sete “pauzinhos” como o da Fig. IX.2, teremos uma curva contínua, como o da Fig. IX.3b.

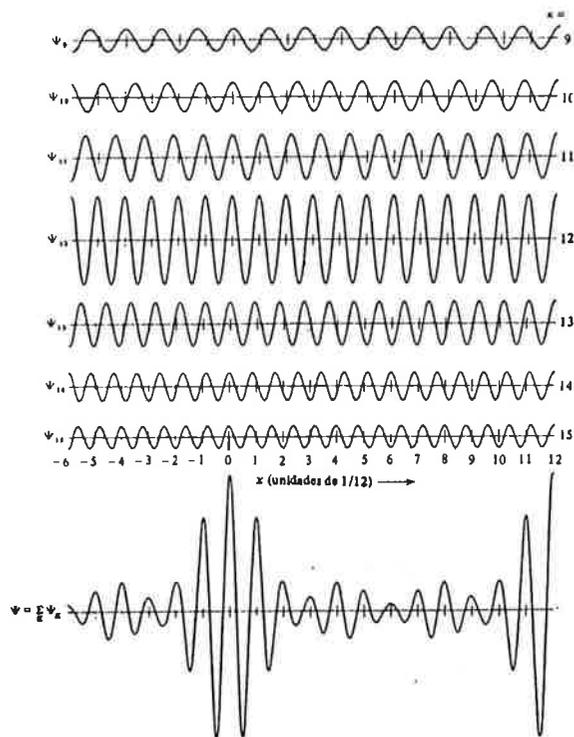
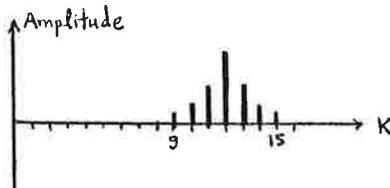


Figura IX.1. A superposição das sete ondas contínuas indicadas, com números de onda $\kappa = 1/\lambda$ inteiros entre 9 e 15, resulta na onda em baixo, que se assemelha a um pacote de onda. A distância entre os picos da onda resultante, que corresponde a 12 divisões na escala dos x , é o comprimento de onda de uma onda com $\kappa = 1$.

Figura IX.2. A mesma onda da figura anterior pode ser representada em um "espaço dos κ ", indicando a amplitude de cada onda senoidal que compõe a onda resultante.



2. Princípio de Indeterminação na Física Ondulatória

A Fig. IX.3 pode estar mal desenhada, mas ela exprime um aspecto muito importante da Física Ondulatória, aspecto esse que se mantém na Física Quântica: qualquer onda (ou estado) pode ser representada no espaço usual "dos x " ou no espaço dual "dos κ ". Na Fig. IX.3a, vemos que o pacote de onda se localiza em torno de um ponto x_0 , e que ele tem uma resolução ou indeterminação Δx . Na Fig. IX.3b, vemos que os números de onda se centram em torno de κ_0 , e apresentam uma indeterminação no espaço dos κ (às vezes chamada de "largura de banda") da ordem de $\Delta \kappa$.

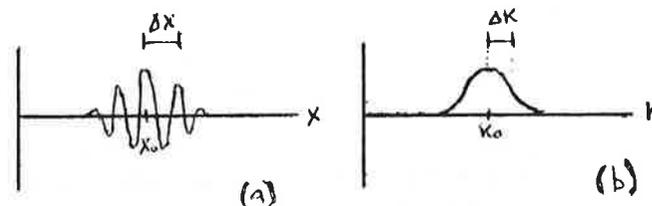


Figura IX.3. Um pacote de onda que (a) em um certo instante se localiza em torno de x_0 , com uma indeterminação Δx , é representado (b) por uma curva contínua no espaço dos κ .

Notamos assim que a mesma onda tem uma indeterminação razoável tanto no espaço de posições quanto no espaço dos números de onda. O que acontece quando reduzimos estas indeterminações?

Na Fig. IX.4 representamos três ondas diferentes. A primeira (Fig. IX.4a) é a onda senoidal contínua, que conhecemos bem, e que corresponde a um número de onda único, sem indeterminação. Neste caso, $\Delta \kappa = 0$, mas o que acontece com Δx ? Aonde que ela se localiza? Ora, ela está (teoricamente) espalhada igualmente por todo o espaço, sua indeterminação tende a infinito: $\Delta x \rightarrow \infty$. O caso da Fig. IX.4b é intermediário, temos Δx e $\Delta \kappa$ razoáveis, como o da Fig. IX.3. Na Fig. IX.4c temos o outro extremo: um pulso muito bem localizado, com $\Delta x \rightarrow 0$, pode ser construído somando-se um contínuo de ondas senoidais para o qual a largura de banda é muito larga: $\Delta \kappa \rightarrow \infty$.

Esse resultado, que apresentamos aqui de maneira superficial, sem demonstrar nada, sugere que quanto menor for a indeterminação espacial Δx , maior será a indeterminação em $\kappa = 1/\lambda$ (em classe, vimos um filme que nos

ajudou a acreditar nisso). De fato, mostra-se que estas indeterminações obedecem à seguinte relação de indeterminação: $\Delta x \cdot \Delta \kappa \approx 1$ (aqui o sinal \approx exprime que o produto é mais ou menos igual a 1).

A partir desta relação, pode-se obter outra para o tempo t e a frequência ν , lembrando que para uma onda de velocidade V , onde esta velocidade é definida como x/t , temos que $\nu/\kappa = V$ (eq. III.1): $\Delta t \cdot \Delta \nu \approx 1$. Para interpretar esta relação, imagine um pacote de onda que atravessa um ponto fixo P. Como o pacote é um pouco espalhado, este o ponto permanecerá um certo tempo Δt dentro do pacote, desde o instante que o pacote atinge P pela primeira vez até o instante em que o pacote deixa P para trás. Pois bem, é esta duração temporal Δt , juntamente com a largura de banda de frequências $\Delta \nu$, que entra na relação de indeterminação.

Em suma, as relações de indeterminação que regem a Física das Ondas Clássicas são:

$$\Delta x \cdot \Delta \kappa \approx 1 \quad \text{e} \quad \Delta t \cdot \Delta \nu \approx 1 \quad (\text{IX.1})$$

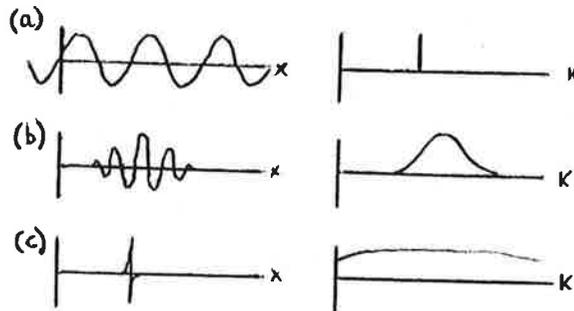


Figura IX.4. Representação de diferentes ondas no espaço das posições (x) e dos κ (dir.). (a) Uma onda contínua corresponde a um único valor de número de onda. (b) Um pacote de onda. (c) Um pulso de onda muito bem localizado corresponde a uma onda espalhada no espaço dos κ .

3. Princípio Quântico de Indeterminação

Aceitando as relações da eq. IX.1 para ondas clássicas, fica fácil derivar as relações no domínio quântico, a partir das eqs. I.1 ($\epsilon=h\nu$) e I.2 ($\lambda=h/p$). Considerando que as indeterminações quânticas podem ser maiores do que aquelas expressas abaixo, o sinal \approx é substituído pelo sinal de “maior ou igual” \geq :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \quad \text{e} \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq h \quad (\text{IX.2})$$

O primeiro par de grandezas “incompatíveis” é a posição x e o momento p_x (na direção x). O segundo par envolve tempo t e energia E .

O que significam estas relações? Vamos nos concentrar apenas no par envolvendo posição e momento, cuja interpretação já é enrolada, e esquecer a segunda relação, que tem dado margem a ainda mais discussão interpretativa. Pois bem, a relação $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$, quando aplicada a partículas com massa, como o elétron (para as quais $p=mV$), envolve as grandezas *posição* e *velocidade*, das quais adquirimos uma boa intuição no Colegial. Ora, passamos o Colegial todo tentando convencer o aluno de que existe algo como “velocidade instantânea” de um projétil, e agora a Mecânica Quântica parece nos dizer que se um átomo está em um lugar bem definido (Δx pequeno), então sua velocidade não pode ser bem definida (ΔV_x grande)! Qual é a maneira correta de interpretar as relações de incerteza?

Infelizmente (ou felizmente!), não há uma única maneira consistente de interpretar $\Delta x \cdot \Delta V_x \geq h$, mais várias maneiras, conforme os pontos de vista apresentamos nos capítulos anteriores (ver as seções IV.3, V.5, V.6, VI.9).

(1) *Interpretação Ondulatória*. Esta visão atribui realidade para o pacote de onda, sem postular a existência de partículas pontuais. Assim, Δx mede a extensão do pacote, indicando que a posição x do objeto quântico (que é o pacote) é indeterminada ou mal definida por uma quantidade Δx . As eqs. IX.2 exprimem assim um princípio de *indeterminação* (e não de incerteza): se x for bem definido, a velocidade V_x do pacote é mal definido, e vice-versa.

(2) *Interpretação da Dupla Solução*. Segundo esta visão, a partícula tem sempre posição e velocidades bem definidos simultaneamente, só que tais valores são desconhecidos. Se medirmos x com boa resolução, temos necessariamente uma *incerteza* ou desconhecimento grande para V_x , pois a

lente. Quanto maior a lente, menor é esta resolução. Assim, a indeterminação Δx_1 do elétron depende do tamanho da lente.

Até aqui, tudo bem: só lidamos com Física Ondulatória Clássica. Agora podemos nos perguntar, qual é a velocidade final do elétron, supondo (para facilitar) que inicialmente ele estava parado? Para responder a esta pergunta, precisamos pensar em termos de um fóton individual (de raio γ) que se choca com o elétron, e que segue uma trajetória retilínea em direção à lente. Na lente, este fóton sofre refração, e acaba caindo no ponto x_2 da chapa fotográfica. O único problema é que não sabemos por qual trajetória (pontilhada na figura) o fóton rumou. E pior: quanto maior a lente (para melhorar a resolução de posição), menos sabemos sobre qual trajetória seguiu o fóton espalhado! Ora, conforme a direção que tomou o fóton, o elétron tomará uma direção específica (efeito Compton: imagine uma bola de bilhar chocando-se com outra parada; conforme o ângulo de incidência, a bola parada terminará rumando em diferentes direções). Conforme a direção final do elétron, o componente de velocidade na direção x , que escrevemos como V_{x1} , será diferente.

Em suma: como não sabemos a direção do fóton espalhado, não sabemos a velocidade final do elétron, com uma incerteza ΔV_{x1} . Quanto maior a lente, menor é Δx_1 , mas maior é ΔV_{x1} . Este é o *princípio* de incerteza; as *relações* de incerteza (eq. IX.2) são uma expressão numérica deste princípio, mas não faremos nas contas aqui. Heisenberg mostrou que a primeira das eqs. IX.2 é satisfeita neste exemplo.

Puxa vida! Deu pra fundir a cuca! Mas e daí? Porque estamos falando disso? Ah, sim! Quisemos mostrar que este lindo raciocínio de Heisenberg tem limitações conceituais: ele é "semi-clássico". Isso porque ele supõe que o elétron, após o espalhamento, tem uma velocidade bem definida, só que nós não sabemos qual ela é. Isso vai contra o espírito das interpretações 1 e 3 vistas acima (ondulatória e complementaridade), mas se aproxima da interpretação 2 (da dupla solução), e também da 4. Isso quer dizer que Heisenberg acreditava que neste caso o elétron tem velocidade exata mas desconhecida? Não! E aí entra uma sutileza filosófica, para entendermos como ele raciocinava.

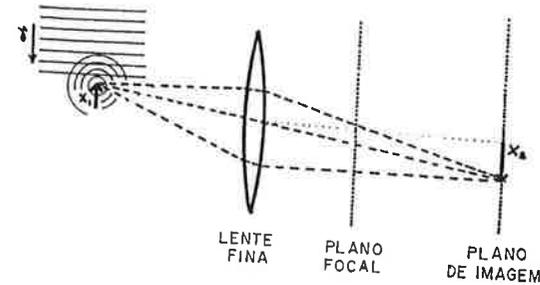


Figura IX.6. Microscópio de raios γ de Heisenberg. Uma onda plana incide em um elétron parado, e a luz espalhada é focalizada numa posição x_2 , que magnifica a posição x_1 do elétron. A resolução da imagem melhora à medida que a lente aumenta de tamanho, mas neste caso a incerteza com relação ao momento (velocidade) final do elétron aumenta. Assim, mostra-se que $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$.

Na seção I.5 mencionamos a diferença entre as atitudes realista e positivista (tocamos neste ponto novamente na seção V.6). Segundo a atitude positivista, muito em moda entre as guerras mundiais, só tem sentido falar que algo é real se este algo puder ser observado. Com isso, o positivismo permite que se passe de uma tese relativa ao conhecimento ("não posso conhecer algo") para uma tese relativa ao ser ("essa coisa não existe", ou mais cautelosamente, "a existência dessa coisa não pode ser afirmada"). É usando este princípio positivista que Heisenberg pôde usar um raciocínio semi-clássico, e ao mesmo tempo dizer, como mais tarde faria, que acreditar que existam tais trajetórias (conforme defendido pela interpretação da dupla solução) é meramente uma opção metafísica, e não científica.

Enfim, com este exemplo deu pra entender porque o princípio é chamado de "princípio de incerteza": esse nome deriva do fato que ignoramos a velocidade final do elétron. Mas como esta noção provém de uma abordagem semi-clássica, muitos autores preferem chamá-lo de "princípio de indeterminação". A escolha depende, como temos repetido ao longo do curso, da interpretação que você adota.

Este assunto todo é muito interessante, e tem ainda bastante pano pra manga. Por exemplo, poderíamos explorar o conceito de “retrodição”, que pode nos levar a afirmar (dentro da interpretação da complementaridade) que as relações de incerteza não valem para o passado, só para o futuro (meio na linha do que vimos na seção V.6, só que mais simples). Mas como isso não foi visto em aula, encerraremos este capítulo por aqui.

Capítulo X

O Átomo

1. Ondas Estacionárias no Átomo

Na seção 1.2 descrevemos brevemente o modelo atômico de Bohr (1913), no qual os elétrons giram em torno do núcleo em órbitas discretizadas: apenas certos valores para os raios das órbitas e para a energia dos elétrons eram permitidas (Fig. X.1). Em 1924, L. de Broglie forneceu uma explicação para essas órbitas baseado na dualidade onda-partícula, que ele estabelecera. O elétron no átomo de hidrogênio teria uma onda associada a ele, e esta *onda* teria um comprimento de onda dado pela eq. 1.2: $\lambda = h/p$. Tal comprimento de onda variaria com o raio da órbita do elétron.

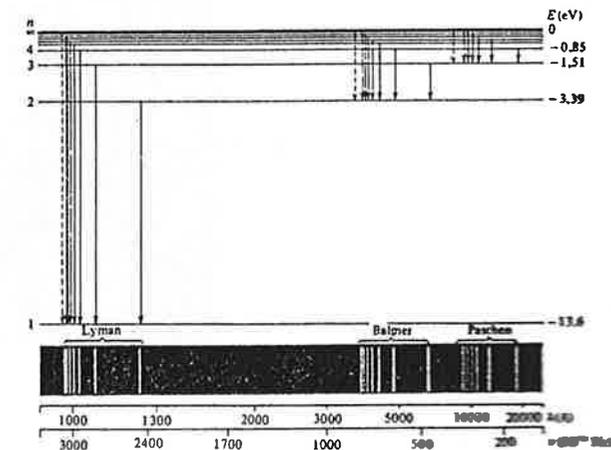


Figura X.1. (Em cima:) Diagrama com os níveis de energia do átomo de hidrogênio, conforme obtido por Bohr. (Embaixo:) Três séries de linhas espectrais do hidrogênio, obtidas através de medições espectroscópicas. Repare que a energia do fóton emitido (que aparece no espectro) é a diferença entre as energias dos níveis entre os quais pulou o elétron.

Pois bem, de Broglie mostrou que as órbitas de Bohr para o átomo de hidrogênio são aquelas cujas circunferências correspondem a um número inteiro do comprimento de onda λ do elétron. As órbitas corresponderiam assim às ondas estacionárias em torno do núcleo (Fig. X.2). Para estes raios, o que ocorreria é que a onda associada ao elétron se move circularmente em torno do núcleo, e quando ela dá uma volta completa, os máximos se encontram em fase de forma que há superposição construtiva (lembramos da seção III.3). Nas regiões fora das órbitas estacionárias, as ondas se superporiam em cada ponto às vezes construtivamente, às vezes destrutivamente, de maneira que, na média, elas se cancelariam.

Essa idéia é bastante atraente a nível intuitivo, e ela se encaixa bem no espírito das interpretações realistas da Física Quântica (as interpretações ondulatória e da dupla solução). Nas Figs. III.13 e VII.4, já vimos exemplos de formação de ondas estacionárias. Nesta última, as ondas são circulares mas elas se propagam radialmente (do centro para fora, e de fora para dentro). No caso do modelo atômico de de Broglie, as ondas se propagariam em torno do núcleo (ao longo da órbita, não radialmente), nos dois sentidos (horário e anti-horário), de maneira análoga ao que ocorre com o aro circular da Fig. X.3.

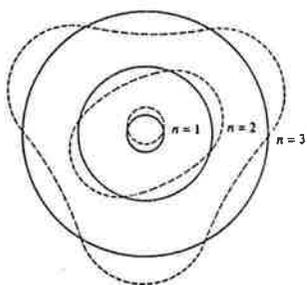


Figura X.2. Modelo ondulatório fornecido por L. de Broglie para o átomo de Bohr. Somente onde as ondas estacionárias se formam é que a onda eletrônica não se anularia. O raio r varia de acordo com n^2 , e λ varia proporcionalmente a n .

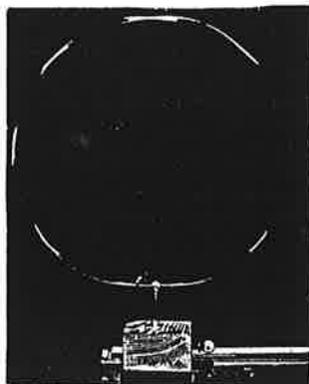


Figura X.3. Foto de uma onda estacionária circular com oito ventres ($n=8$), formada em um aro metálico.

De fato, seria possível construir um modelo mecânico para o que ocorre na eletrosfera do átomo a partir de uma série de aros metálicos concêntricos, de igual espessura, encostados uns nos outros conforme a Fig. X.4. Neste caso, uma haste radial encostada nos aros vibraria a uma frequência constante. O que se observaria é que apenas alguns aros vibrariam em ressonância com a haste, exibindo ondas estacionárias de amplitude razoável, enquanto que os outros aros vibrariam complicadamente de maneira não estacionária e sem uma amplitude apreciável.



Figura X.4. Modelo mecânico da idéia de de Broglie para o átomo de Bohr. Uma série de aros metálicos concêntricos e independentes se assentaria em uma superfície macia (espuma) ou seria suspensa por fios. A vibração de uma haste horizontal a uma frequência determinada geraria ondas estacionárias (representadas em negrito) em apenas alguns aros, igualmente espaçados entre si. Um modelo mais fiel ao átomo de hidrogênio teria aros cujo λ variaria com \sqrt{r} .

2. Corda Vibrante e Potenciais Quânticos

Considere uma corda presa entre dois pontos fixos, como a corda de um violão, e vamos explorar os movimentos possíveis desta corda quando ela se movimenta livremente entre os pontos fixos, *sem sofrer a ação de uma força externa*, e com um atrito desprezível. Existe uma série de estados estacionários para esta corda, correspondendo a um número inteiro de ventres, conforme indicado na Fig. X.5. Se pegarmos no centro da corda do violão e a puxarmos, ela oscilará (com boa aproximação) conforme o estado estacionário fundamental, emitindo um som com frequência (altura) ν_1 igual ao da sua vibração. Se pusermos o dedo de leve sobre o ponto central da corda e a tocarmos, ouviremos o harmônico superior ν_2 que no caso corresponde a uma frequência duas vezes maior que a fundamental. E assim por diante. Teremos um espectro discreto de frequências, semelhante ao espectro de energia do

átomo de hidrogênio (Fig. X.1). Cada onda estacionária pode ser chamada de um *autoestado* do sistema, e cada frequência de vibração corresponderia a um *autovalor*. Esta nomenclatura vale tanto para a corda vibrante quanto para o sistema atômico.

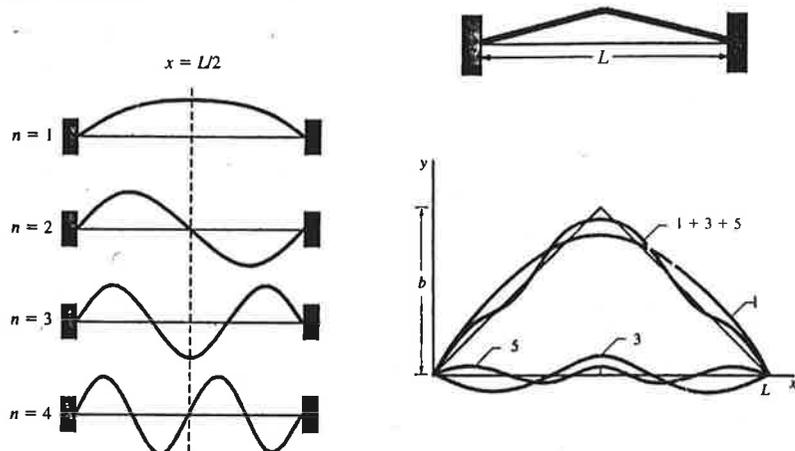


Figura X.5. Quatro modos de vibração fundamentais da corda de um violão. A cada um desses autoestados (estados estacionários) corresponde um único valor de frequência sonora: $\nu_n = n \cdot \nu_1$. Por isso, estas são os autovalores associados

Considere o caso em que a corda começa a vibrar de uma maneira complicada. Ouviremos notas com frequências intermediárias daquelas do espectro? Não. O que ouviremos é uma soma de sons em diferentes frequências. E mais: o movimento complicado descrito pela corda vibrante pode ser descrito como uma superposição das ondas estacionárias (da mesma maneira que o pacote de onda da Fig. IX.1 é uma superposição de ondas senoidais). Em outras palavras, *qualquer estado do sistema pode ser descrito como uma superposição de autoestados*. E mais ainda: existe uma relação entre as amplitudes A_i dos autoestados que compõem a onda complicada e a intensidade sonora I_i de cada altura ouvida, que é dada pela eq. (III.2): $I_i = k \cdot A_i^2$, onde k é uma constante para cada sistema.

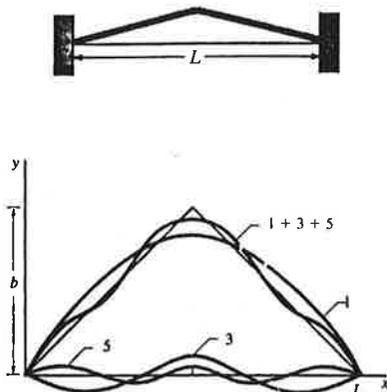


Figura X.6. Uma corda de violão cujo formato inicial tem forma triangular (em cima) pode ser decomposta em ondas senoidais (autoestados) simétricas, ou seja, com n ímpar (em baixo). Assim, apenas as frequências (autovalores) ν_n para n ímpar, são geradas por esta corda de violão.

Agora consideremos a transição para o regime quântico desta corda vibrante. Conforme já vimos, isso é feito reduzindo-se as energias do sistema. Não existem cordas vibrantes a nível atômico, mas poderíamos imaginar um elétron preso entre duas paredes impenetráveis. Neste caso ideal, o que obteríamos é chamado de poço potencial quadrado infinito, com autoestados muito semelhantes ao do caso da corda vibrante. Num outro exemplo, podemos imaginar um elétron ligado a um núcleo através de uma mola, que fornecerá um espectro de autovalores idêntico ao da corda vibrante clássica (Fig. X.6). Qualitativamente, esses dois exemplos são iguais, só mudando a forma dos autoestados e o espectro de autovalores. Um terceiro exemplo qualitativamente parecido com os anteriores é o potencial elétrico "coulombiano", que representa em 1ª aproximação o átomo de hidrogênio.

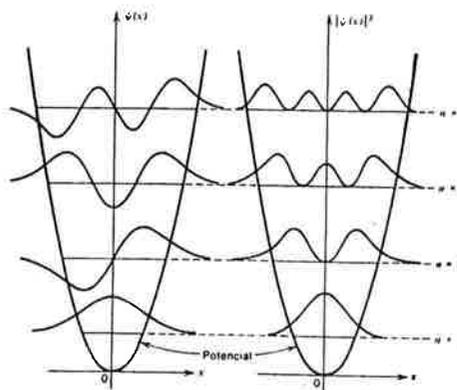


Figura X.6. Em teoria quântica é comum representar um sistema ligado através da sua função energia potencial (o que equivale a dar a força resultante na partícula). Os autovalores de energia $n\hbar\nu$ podem ser indicados no gráfico desta função potencial. É costume também desenhar os autoestados na altura desses autovalores. Na figura, representa-se um poço de potencial harmônico. À esq., mostram-se os autoestados $\psi(x)$, e à dir., os seus módulos quadrados, que fornecem a (densidade de) probabilidade de encontrar a partícula associada numa certa posição x .

De forma análoga ao caso clássico da corda vibrante, os únicos valores possíveis de energia são os autovalores (no caso da corda, os autovalores eram as frequências ouvidas): não é possível observar valores intermediários!

No caso da corda, é possível ter movimentos complicados que geram muitas frequências sonoras. E no caso quântico? Seria possível para um elétron no átomo de hidrogênio estar em um estado complicado, sem uma energia bem definida? Claro! O que garante isso, no domínio quântico, é o princípio de superposição que vimos na seção IV.4. A analogia com o caso

ondulatório clássico é quase perfeita. Qualquer estado possível do sistema quântico pode ser obtido como uma superposição dos autoestados.

Há porém uma diferença significativa entre o caso clássico e quântico: no caso clássico da corda vibrante nós ouvimos os vários sons *ao mesmo tempo*, com diferentes intensidades. No caso quântico, para energias suficientemente baixas, nós "ouviríamos" apenas uma ou outra nota, isoladamente.

3. A Equação de Schrödinger

Antes de prosseguir essa discussão com relação ao átomo, vamos fazer um resumo esquemático do formalismo da Teoria Quântica, de forma a poder descrever com mais detalhe o que acontece quando efetuamos medições de energia em um átomo cujo estado é uma superposição de autoestados de energia.

As regras associadas a medições na Teoria Quântica já foram apresentadas sucintamente nas seções VI.4 e 5. Faltou enfatizar o que acontece a um sistema quântico enquanto *não* estão ocorrendo medições. Isso é descrito pela famosa *equação de Schrödinger*.

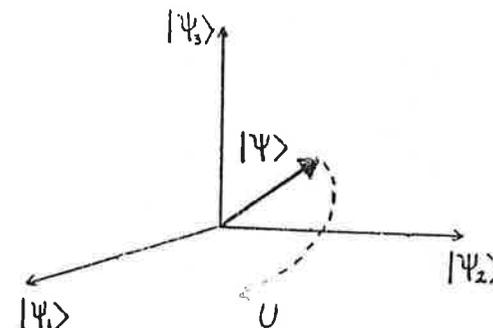
Considere um estado atômico que é uma *superposição de autoestados de energia*, semelhante ao que foi descrito na seção anterior. Se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ corresponderem a dois autoestados diferentes, com (autovalores de) energia E_1 e E_2 , então é possível preparar um átomo no seguinte estado (por exemplo):

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_2\rangle \quad (\text{X.1})$$

Como este estado não é estacionário, podemos supor que ele terá uma *evolução temporal*, ou seja, ele se alterará com o passar do tempo. A lei que descreve como se dá esta evolução temporal é a equação de Schrödinger, ou uma outra equação equivalente. Não precisamos escrever a equação, que é matematicamente sofisticada (ver Fig. I.12). Basta pensarmos que o que ela faz é pegar um estado inicial qualquer, representado por um vetor no espaço de estados da Fig. X.7, e o gira continuamente neste espaço (podendo também inverter o sentido do vetor). Só isso. Conforme o sistema, a lei particular que rege esse giro do vetor de estado se altera, mas qualitativamente o que ocorre é a mesma coisa, pelo menos a nível teórico.

A equação de Schrödinger é um "esquema de lei", assim como a "2ª lei de Newton": para cada sistema em particular (mola, gravidade, etc.), a força adquire uma expressão particular, e o esquema da "2ª lei" torna-se de fato uma equação, uma lei que permite calcular previsões. No caso quântico a situação é análoga: para cada sistema "fechado", define-se um "operador hamiltoniano" que seria o análogo da força newtoniana, e colocando este operador específico na equação de Schrödinger, obtém-se uma lei que descreve com exatidão a evolução temporal do vetor de estado.

Figura X.7. Qualquer estado possível de um sistema quântico corresponde a um vetor no "espaço de Hilbert" (um espaço linear complexo). A evolução U descrita pela equação de Schrödinger "gira" continuamente o vetor do estado inicial neste espaço.



4. Medições Repetidas em um Átomo

Já temos todos os elementos para fazer Física Quântica, pelo menos ao nível qualitativo de uma brincadeira!

Pegamos um átomo e o prendemos em uma armadilha magnética; ele fica assim suspenso numa região evacuada, isolado de outras moléculas. Ai jogamos um pouco de luz neste átomo, e isso altera o seu estado eletrônico. Se conhecermos direitinho as propriedades da luz que incidiu no átomo, e da luz por ele espalhada, podemos estabelecer em qual estado ele foi "preparado". Assim, no instante $t=0$ efetuamos uma *preparação de estado*, que calculamos como sendo o da eq.(X.1), por exemplo.

Muito bem. Resolvemos que 1 milissegundo após a preparação iríamos medir a energia do átomo. O estado é o mesmo dado pela eq.(X.1)? Não! Precisamos pegar a equação de Schrödinger com o hamiltoniano apropriado, e calcular como que o estado inicial (eq.X.1) evolui em 1 milissegundo (ou seja, como que ele "gira" no espaço de estados). Pedimos para um físico fazer isso pra nós, e vamos supor que ele concluiu que o estado após 1 milissegundo é:

$$|\psi(1\text{ms})\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\psi_1\rangle - \frac{1}{2}|\psi_2\rangle \quad (\text{X.2})$$

Bem, vemos que de fato o estado da eq.X.1 não era estacionário, pois ele mudou bastante. Na verdade, o que ocorre com o passar do tempo é que esse estado oscila periodicamente entre os dois autoestados, com uma frequência dada por $|E_2 - E_1|/\hbar$, que é igual ao do fóton emitido.

Bem, agora que sabemos qual é o estado do sistema no instante da medição, podemos calcular qual é a probabilidade de obtermos o valor E_1 , e a probabilidade para E_2 . Se ele estivesse no estado estacionário $|\psi_1\rangle$, obteríamos com certeza o valor E_1 ; se ele estivesse no estado $|\psi_2\rangle$, obteríamos E_2 . No caso da eq.X.2, o que fazemos é tomar o quadrado dos coeficientes que multiplicam cada autoestado. Isso equivale à regra de Born que o acompanha na Fig.1.13. Obtemos:

$$\begin{cases} \text{Prob}(E_1) = \frac{3}{4} \\ \text{Prob}(E_2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Puxa vida! Sabemos a probabilidade dos diferentes resultados, mas não podemos prever exatamente o que vai acontecer na medição única que eu efetuar. Esse *probabilismo*, nós já sabemos, é uma característica essencial da Teoria Quântica. Enfim, se após a medição preparássemos nosso átomo novamente no estado da eq.X.1 e repetíssemos exatamente os procedimentos experimentais, fizéssemos a mesma medição, e repetíssemos tudo de novo 1 milhão de vezes, a “frequência relativa” dos resultados certamente aproximaria as probabilidades calculadas acima.

Bom, voltemos ao laboratório e efetuemos uma única medição. No caso é só esperar o estado eletrônico “decair”, e medir a energia do fóton emitido. (Por que o estado decair é uma pergunta que foge ao nosso escopo aqui, mas isso está ligado às misteriosas “flutuações do vácuo”.) Na prática, não é fácil fazer tal medição, mas no nosso mundo de brincadeira... Presto! Obtivemos E_1 !

Pronto. Agora a pergunta é a seguinte: se eu repetir a medição neste mesmo sistema (sem prepará-lo novamente), logo após a primeira medição (que forneceu E_1), qual é a probabilidade de obtermos novamente o valor E_1 ? Bem, pelo Postulado da Projeção que descreve a “redução de estado” (seção VI.6), o estado após a medição é o autoestado correspondendo ao autovalor obtido. Assim, o estado após a primeira medição, em nosso exemplo, é:

$$|\psi_{\text{red.}}\rangle = |\psi_1\rangle \quad (\text{X.3})$$

Agora é mais ou menos fácil ver que *uma medição repetida da mesma grandeza fornece o mesmo resultado!* Legal!

5. A Energia do Átomo é sempre Discreta?

Voltemos agora para a discussão da seção X.2 a respeito da natureza do átomo. Sempre que observamos um átomo, e medimos sua energia, obtemos um valores discreto (Fig. X.1). Devemos então concluir que o átomo tem sempre um valor discreto de energia, mesmo antes da medição? Ou devemos seguir a analogia com a Física Ondulatória Clássica, e dizer que não, que antes da medição ele estava numa superposição (eq. X.2), e que portanto estava potencialmente com diferentes valores de energia? Como vocês já devem estar suspeitando, não há uma única resposta: vai depender da interpretação que você adota!

1) *Interpretação Ondulatória*. Antes da medição o átomo não tem um valor de energia bem definida, estando potencialmente com dois valores. Com a medição ocorre um colapso, e o valor medido (dado pela frequência da linha espectral) corresponde ao valor da energia do átomo *após* a medição. Este seria o caso mesmo que o átomo esteja na estrela de Sírio.

2) *Interpretação da Dupla Solução*. Antes da medição, a partícula associada ao elétron já se encontra com energia bem definida, E_1 ou E_2 . A onda associada, porém, é uma superposição dos dois autoestados de energia, o que pode levar a efeitos de interferência. Um fato curioso: na teoria de David Bohm, para certos níveis atômicos (ondas s), o elétron fica *parado* em relação ao núcleo, sem girar em torno dele. Isto é considerado por muitos como um *defeito* da teoria.

3) *Interpretação da Complementaridade*. Após medir a energia E_1 , é possível fazer uma “retrodição” e dizer que a energia do átomo já era E_1 antes da medição. Isso evita problemas de não-localidade com relação a um átomo na estrela de Sírio, mas envolve a mesma noção de que “o passado se atualiza no presente” exposta na seção V.6.

Fundamentos da Física Quântica: um Histórico

1. A Interpretação da Complementaridade

Para encerrar este curso, vamos retomar o breve histórico do capítulo I e discorrer sobre o desenrolar das discussões sobre os Fundamentos da Física Quântica.

Em meados de 1926, vários físicos mostraram que a Mecânica Matricial de Heisenberg, Born e Jordan era equivalente à Mecânica Ondulatória de Schrödinger. Max Born fornecera a regra probabilista para interpretar a função de onda Ψ , que foi generalizada no final de 1926 com a teoria da transformação de Dirac e Jordan (ver seção 1.5).

Restava porém o problema de como interpretar o formalismo da nova Mecânica Quântica. Dever-se-ia aceitar a interpretação ondulatória de Schrödinger, que para o elétron equacionava $|\Psi|^2$ a uma densidade de carga elétrica, sem a existência de partículas? Ou dever-se-ia confiar na visão desenvolvida por Louis de Broglie, que concebia o objeto quântico como consistindo de uma partícula mais uma onda guia?

Em Copenhague, Heisenberg passava uma temporada trabalhando com Niels Bohr (Fig. I.4), e ambos tentavam decifrar o enigma da nova teoria. Heisenberg considerava que tanto a linguagem corpuscular quanto a linguagem ondulatória seriam satisfatórias para descrever objetos quânticos, mas Bohr insistia que ambas eram necessárias. Em fevereiro de 1927, Bohr foi esquiador na Noruega, e deixou seu discípulo livre para desenvolver suas próprias idéias. Heisenberg tentava entender como dar conta das trajetórias lineares de partículas em uma câmara de nuvens de Wilson. Desenvolveu então a idéia de que devido à observação ocorreria uma "redução do pacote de probabilidade" (o que chamamos de colapso). Imaginando como medir a posição de uma partícula, pensou em um microscópio de raios gama, e chegou em suas famosas relações de incerteza.

Paralelamente a isso, Bohr também encontrou inspiração nas neves norueguesas, e cristalizou sua idéia de que grandezas "complementares" não podem ser *definidas* de maneira simultânea (Heisenberg defendia que elas apenas não podiam ser simultaneamente *medidas* com boa resolução). Após muito elaborar, Bohr apresentou em setembro a sua interpretação da complementaridade na cidade italiana de Como, no centenário da morte de

Alessandro Volta. Em outubro, reapresentou suas idéias no 5º Congresso de Solvay, desta vez com a presença de Albert Einstein (Fig. I.2).

O ponto de partida de Bohr era o “postulado quântico” descoberto por Planck, segundo o qual qualquer processo atômico possui uma “descontinuidade essencial” ou “individualidade”. Isso é exemplificado pelas detecções pontuais de fótons ou elétrons exibidas na Fig. II.6 (ver também o paradoxo da quantidade explicado na seção I.3). Como consequência desta descontinuidade está o fato de que o observador sempre provocará um distúrbio incontornável ao interagir com o objeto.

Segundo Bohr, um objeto quântico não pode ser inteiramente compreendido dentro de um “quadro único”, mas necessita de descrições mutuamente excludentes, como “onda” ou “partícula”, que juntas se complementam para descrever o objeto. Estamos presos à linguagem da Física Clássica, que serve para comunicar às outras pessoas as montagens e procedimentos reprodutíveis que são usados em experimentos científicos. Essa linguagem clássica é limitada, e é insuficiente para descrever objetos quânticos dentro de um quadro único.

Dentre os físicos cuja interpretação da Física Quântica se aproxima bastante da de Bohr podemos citar Wolfgang Pauli, Leon Rosenfeld e, mais recentemente, o norte-americano John Wheeler (Fig. XI.1), cujo experimento de escolha demorada exploramos na seção V.6.

2. Discussões nos Congressos de Solvay

O 5º Congresso de Solvay apresentou discussões memoráveis. A interpretação de Schrödinger foi criticada por envolver muitas mais dimensões do que as três dimensões espaciais. A interpretação da dupla solução de de Broglie foi elogiada por Einstein, mas as duras críticas de Pauli o levariam a abandonar sua interpretação (até 1952). Dirac elaborou a idéia de que o colapso seria uma escolha feita “pela natureza”, ao que Heisenberg retrucou dizendo que o ato da *observação* era o responsável.

A discussão mais célebre desta conferência foram as tentativas de Einstein para escapar ao princípio de incerteza. Pensando no fenômeno ondulatório do experimento das duas fendas, propôs que se poderia determinar a trajetória da partícula medindo o recuo do anteparo que contém as duas fendas após a passagem da partícula. Bohr, porém, partindo da suposição de que tal anteparo também obedecia às relações de incerteza, mostrou que tal medição do recuo apagaria as franjas de interferência.

No próximo Congresso em 1930, Einstein voltou ao ataque, tentando violar o princípio de incerteza para energia e tempo através de um engenhoso aparelho. Bohr, no entanto, novamente mostrou o erro de Einstein, desta vez apelando para a própria Teoria da Relatividade Geral, desenvolvida por Einstein em 1915.

Essas vitórias de Bohr sobre o maior físico do século certamente ajudaram os físicos a aceitar a interpretação da complementaridade, que passou a ser a “interpretação ortodoxa” da Mecânica Quântica. De maneira geral, os físicos passaram a ignorar problemas de fundamentos da Física Quântica, confiando na solução apresentada por Bohr, apesar da maioria não entendê-la muito bem.

3. As Provas de von Neumann

Em 1932, John von Neumann (Fig. I.14) publicou em alemão um livro monumental intitulado *Fundamentos Matemáticos da Mecânica Quântica*. Neste livro ele apresentou pela primeira vez a Teoria Quântica em termos de postulados, propondo assim uma “axiomatização” da teoria. Apresentou também uma demonstração que seria muito influente. Provou que teorias de variáveis ocultas, como a interpretação da dupla solução, não poderiam reproduzir todos os resultados da Mecânica Quântica. Tal *prova de impossibilidade* sofreu uma ou outra crítica, mas só a partir do trabalho de Bell, em 1966, é que se esclareceu que tal demonstração, apesar de correta, não exclui todas as teorias de variáveis ocultas possíveis.

Von Neumann também apresentou uma *prova de insolubilidade* para o problema do colapso associado à medição. Tal prova significa que o postulado da projeção (seção VI.5), que descreve as transições de estado durante a medição, não pode ser reduzido à equação de Schrödinger (seção X.3). Como consequência, não se pode aceitar o que viria a ser chamado de “criptodeterminismo”, ou seja, a visão de que a imprevisibilidade quântica é somente devida à nossa ignorância do estado microscópico exato do aparelho de medição.

Tais provas de insolubilidade seriam melhoradas na década de 1960, a partir do trabalho do húngaro-americano Eugene Wigner (Fig. XI.2).

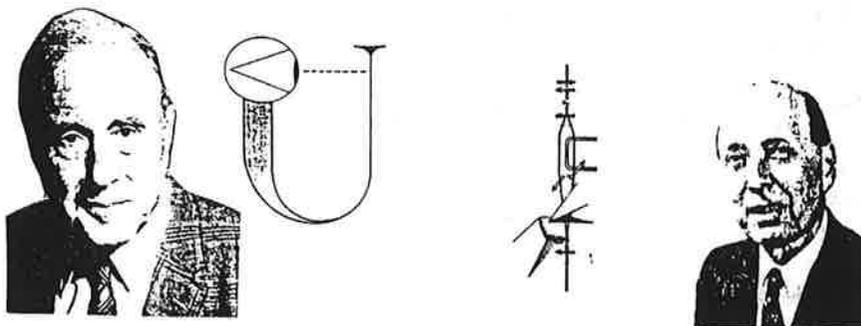


Figura XI.1. John Wheeler é atualmente o mais importante defensor da interpretação da complementaridade, apesar de ter defendido durante algum tempo a visão ondulatória de seu aluno Everett.

Figura XI.2. Eugene Wigner fez dezenas de trabalhos importantes nos fundamentos da Mecânica Quântica, entre os quais uma "prova de insolubilidade" ao problema do colapso.

4. O Paradoxo de EPR

Bohr havia vencido duas batalhas com Einstein, mas a guerra cordial entre esses dois gigantes continuaria. Em 1935, Einstein, Podolsky & Rosen (EPR) apresentaram um experimento de pensamento para mostrar que a Teoria Quântica é *incompleta*, ou seja, que existem "elementos de realidade" que a teoria não consegue descrever.

Para entender o problema de maneira adequada, precisaríamos de uma aula (ou capítulo) inteira, mas como não temos todo esse tempo, vamos nos contentar em apenas descrever superficialmente o paradoxo. Considere a montagem experimental da Fig. XI.3, que foi apresentada em 1951 por David Bohm, e que é mais simples do que a montagem original de EPR.

Um par de partículas é emitido de maneira que seu estado de spin é *anti-correlacionado*. Esse estado de spin, que no caso é conhecido como estado de "singlete", tem a seguinte propriedade interessante: se medirmos o spin na direção θ da partícula A e obtivermos o valor $+1$ (ou seja, o componente de spin foi encontrado apontando na direção $+\theta$, e não na direção $-\theta$), então se medirmos o spin na direção θ da partícula B, *com certeza* obteremos o valor -1 . Esta propriedade pode parecer trivial, mas o estranho é que ela vale para qualquer ângulo θ , e isso é incrível. Só um estado quântico

possui uma simetria tal que permite que isto aconteça. Para que o leitor entendesse o porquê disso, teríamos que nos deter mais neste ponto, mas não o faremos aqui.

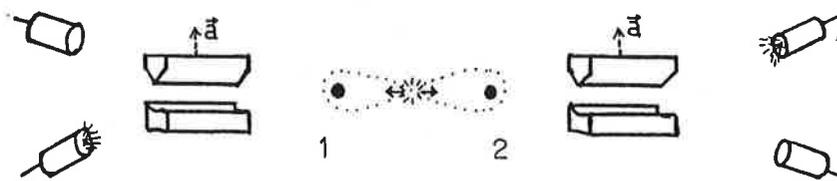


Figura XI.3. Par de partículas emitidos com seus spins anti-correlacionados.

Pois bem, podemos medir o spin na direção z da partícula A, e neste caso, instantaneamente (devido a um processo de colapso, segundo a visão ondulatória), o valor deste componente de spin da partícula B se atualizaria, tomando-se "real". Mas poderíamos também ter medido o spin na direção x da partícula A, e neste caso o que se tornaria "real" em B seria o componente de spin nesta direção. Ora, se as partículas A e B estiverem muito distantes, não dá tempo para a escolha que fazemos em A (medir spin na direção z ou medir na direção x) influenciar o estado de B. Esta é a hipótese da *localidade*. Assim, tanto o spin na direção z quanto na direção x para a partícula B teriam realidade simultânea, o que não é permitido pela Mecânica Quântica, pois essas grandezas não são "compatíveis", e portanto seus valores deveriam estar limitados pelo princípio de incerteza. Portanto, concluíram EPR, a Teoria Quântica é incompleta!

Repito que é muito difícil para o leitor entender o paradoxo com esta breve exposição, mas pelo menos ele sentiu o "sabor" do problema. Em termos lógicos, o argumento de EPR pode ser colocado nos seguintes termos: partindo-se do *formalismo* da Teoria Quântica (F), uma forma branda de *realismo* (que diz que se podemos prever algo com certeza, então existe um "elemento de realidade" correspondente) (R), e a condição de *localidade* (uma medição aqui não pode afetar instantaneamente um elemento de realidade lá longe) (L), conclui-se que a Teoria Quântica é *incompleta*, ou seja, existem elementos de realidade que não têm um correspondente na teoria. Esquemáticamente (onde \mapsto é o sinal de implicação lógica):

$$F, R, L \mapsto \text{Incompleteza} \quad (\text{XI.1})$$

O artigo de EPR caiu sobre Niels Bohr como um “raio do céu”. Após cinco semanas de muita ponderação, ele escreveu um artigo de resposta, no qual podemos dizer que ele rejeitou a concepção de realidade (R) usada por EPR. Bohr foi também forçado a aprimorar a interpretação da complementaridade, salientando que o “fenômeno” quântico envolve tanto o objeto quanto o aparelho (conforme vimos a partir da seção V.2), que formam uma *totalidade* que não pode ser adequadamente analisada em partes..

Muita discussão foi gerada pelo paradoxo de EPR, e nos anos 60 o problema retornaria sob outra roupagem, através da desigualdade de Bell.

5. Teorias de Variáveis Ocultas

Vimos que von Neumann (1932) havia demonstrado ser impossível haver uma teoria de variáveis ocultas (TVO) que obtivesse todas as previsões da Teoria Quântica. Uma TVO é qualquer teoria que adiciona grandezas invisíveis à Mecânica Quântica – parâmetros ocultos como a posição da partícula na interpretação da dupla solução –, e que dessa maneira consegue retornar ao ideal da Física Clássica de uma teoria determinista, onde os eventos não ocorrem ao acaso. Em outras palavras, se num experimento quântico conhecêssemos o estado quântico $|\psi\rangle$ e o valor das variáveis ocultas λ , poderíamos prever com exatidão o resultado de qualquer medição feita em um objeto individual.

Von Neumann “provou” que tal teoria não poderia existir. No entanto, em 1952, o norte-americano David Bohm (Fig. XI.4) apresentou uma nova versão da antiga interpretação da dupla solução de de Broglie, uma interpretação realista e com variáveis ocultas (as posições e velocidades das partículas) que era consistente com a Mecânica Quântica, gerando as mesmas previsões que esta! Mas como isso era possível? E a prova de von Neumann? Ora, Bohm explicou que em sua teoria, as variáveis ocultas relevantes não pertenciam apenas ao objeto quântico, mas também ao aparelho de medição. Assim, continuava sendo verdade que, dado o estado quântico $|\psi\rangle$ e o valor das variáveis ocultas λ , o resultado de uma medição seria determinado (apesar de ser impossível conhecer todas as variáveis ocultas relevantes). Acontece que quando medimos a posição x ou a velocidade V_x , o arranjo experimental muda (em acordo com as idéias de Niels Bohr), e assim muda também o conjunto de variáveis ocultas relevantes. Essa propriedade da teoria de David Bohm é chamada de *contextualismo*, e ela é suficiente para escapar da prova de impossibilidade de von Neumann.

Bohm trabalhou na Universidade de São Paulo entre 1952 e 1955, fugindo do macartismo. Morando aqui, colaborou com vários físicos brasileiros, e tentou estender sua teoria para o domínio relativístico, projeto este que não teve muito sucesso, e explica porque poucos físicos aderiram à sua abordagem.

6. A Desigualdade de Bell

A teoria de Bohm tem uma propriedade que a afasta das teorias mais modernas da Física Clássica: ela viola a condição de localidade! Ou seja, um evento que ocorre aqui pode influenciar instantaneamente o estado quântico lá longe. É assim que a teoria de Bohm resolve o paradoxo de EPR: sua teoria não seria incompleta (a Mecânica Quântica seria), apesar de satisfazer a condição do realismo (R) da seção XI.4, porque *ela viola a condição de localidade* (L).

O norte-irlandês John Stuart Bell (Fig. XI.5) achou curioso esta característica da teoria de Bohm, e suspeitou que ela seria uma característica geral de qualquer TVO consistente com a Teoria Quântica. Antes de explorar essa possibilidade, porém, escreveu um importante artigo no qual esclareceu as limitações de provas de impossibilidade como a de von Neumann. E no artigo seguinte, publicado em 1964, derivou uma desigualdade envolvendo



Figura XI.4. David Bohm, que propôs em 1952 uma versão realista e não-local da Teoria Quântica Não-Relativística, próxima à interpretação da dupla solução.

Figura XI.5. John S. Bell, que provou que teorias realistas locais (com poucas exceções) são inconsistentes com a Teoria Quântica.

grandezas mensuráveis para pares correlacionados de partículas (como os da Fig. XI.3) que seria obedecida por qualquer TVO *local*, mas que seria violada pela Teoria Quântica! Dentro de uma década, experimentos mostraram que a natureza de fato viola essas desigualdades, em acordo com a Teoria Quântica, e que portanto *teorias de variáveis ocultas locais são incorretas*.

Esquemáticamente, podemos representar este resultado da seguinte maneira. Uma teoria que seja realista (como as interpretações ondulatória e da dupla solução) (R), e que seja local (L), e que descreve um mundo no qual podemos usar a “indução” (ou seja, um experimento para testar a desigualdade de Bell envolve amostragens justas, não viciadas, de pares de partículas) (I), obedece a uma desigualdade que é violada pela Teoria Quântica e pela natureza:

$$R, L, I \mapsto \text{Desigualdade} \quad (\text{XI.2})$$

Vale a pena comparar este resultado com o paradoxo de EPR (eq. XI.1). Note que a desigualdade de Bell não limita a TVO de Bohm, que é não-local. Mas este resultado chocou os poucos físicos que ainda acreditavam ser possível explicar a Física Quântica por meio de uma interpretação realista e local, como a da Física Clássica. Tanto que eles foram capazes de bolar uma maneira de escapar ao resultado de Bell, construindo uma teoria realista local, mas que viola a indução (I) e possui uma estranha propriedade conhecida como “não-realce”.

Para encerrar, citamos John Clauser (1991), que trabalhou na verificação experimental da desigualdade de Bell: “Percebi que o Teorema de Bell tinha conseqüências filosóficas que iam muito além das teorias de variáveis ocultas que nós propalávamos que ele restringia. De fato, ele restringe a própria objetividade da natureza. [...] O consenso [a partir de 1976] passou a ser que a Mecânica Quântica é muito mais espantosa do que ela parecia ser antes de 1964.”