

## Experimentos Relativísticos 2: Paradoxo dos gêmeos em aviões

Em 1972, o físico Joseph C. Hafele e o astrônomo Richard E. Keating<sup>1</sup> realizaram um teste da Teoria da Relatividade, colocando relógios atômicos em aviões a jato que circunavegaram a Terra em sentidos opostos. Ao final do experimento, os relógios nos dois aviões (um indo para oeste, outro para leste) e o relógio que permaneceu em Washington mostraram diferenças da ordem de centenas de nanossegundos. Dois efeitos contribuíram para que os relógios andassem em ritmo diferente.

O primeiro é efeito de *dilatação temporal cinemática* da Teoria da Relatividade Restrita, explorado didaticamente por meio do chamado “paradoxo dos gêmeos”. Neste experimento mental, um gêmeo permanece na Terra ao passo que o outro viaja para uma estrela próxima e retorna depois de, digamos, 10 anos contados na Terra: neste caso, o viajante envelheceu apenas 8 anos, ficando dois anos mais jovem que seu irmão gêmeo!

O segundo efeito é a *dilatação temporal gravitacional* prevista pela Teoria da Relatividade Geral. Considere dois pontos em repouso na superfície da Terra, um no nível do mar e outro em uma montanha, a uma altura  $h$ , e suponha que a aceleração da gravidade seja representada aproximadamente pela mesma constante  $g$  nos dois pontos. Neste caso, um relógio localizado na montanha, marcando um intervalo de tempo  $\Delta t'$ , caminha mais rápido do que no nível do mar, onde o intervalo de tempo é  $\Delta t$ , de tal forma que (na aproximação de campos fracos):  $\Delta t' = (1 + gh/c^2) \Delta t$ , onde  $c$  é a velocidade da luz.

Começamos analisando o efeito de dilatação cinemática da Teoria da Relatividade Restrita, no caso do experimento de Hafele-Keating. Faremos um cálculo simplificado, diferente do experimento real, onde os voos foram feitos fora do equador. Na Fig. 2, são desenhados dois jatos que saem de um ponto no equador, um para oeste e outro para leste, e se reencontram no mesmo ponto da superfície, após darem a volta na Terra, após aproximadamente 18h30min. Neste tempo, a Terra girou em torno do seu eixo, de forma que devemos escolher um referencial externo à Terra, associado ao espaço absoluto newtoniano, ou ao referencial fixado pela matéria do Universo.

Esses quatro referenciais podem ser desdobrados de maneira linear, como na Fig. 3. O avião que ruma para oeste acaba tendo uma velocidade menor (em relação ao referencial inercial), já que ele voa contra o sentido de rotação da Terra. Por outro lado, o avião que ruma para leste adquire uma velocidade maior, e assim esperamos que sua dilatação temporal seja maior, ou seja, ele marcará um intervalo de tempo numericamente menor entre os eventos de saída e chegada dos aviões. Se  $\Delta t$  é o intervalo no referencial parado, o intervalo no referencial em movimento com velocidade  $v$  é dado por  $\Delta t' = \Delta t / \gamma$ , onde o fator de Lorentz é  $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .



Fig. 1: Hafele, aeromoça e Keating, em um avião comercial, com dois dos relógios atômicos utilizados (fonte: Wikipédia).

<sup>1</sup> HAFELE, J.C. & KEATING, R.E. (1972), “Around-the world atomic clocks: predicted relativistic time gains”, *Science* 177, 166-8. “Around-the world atomic clocks: predicted relativistic time gains”, *Science* 177, 168-70.

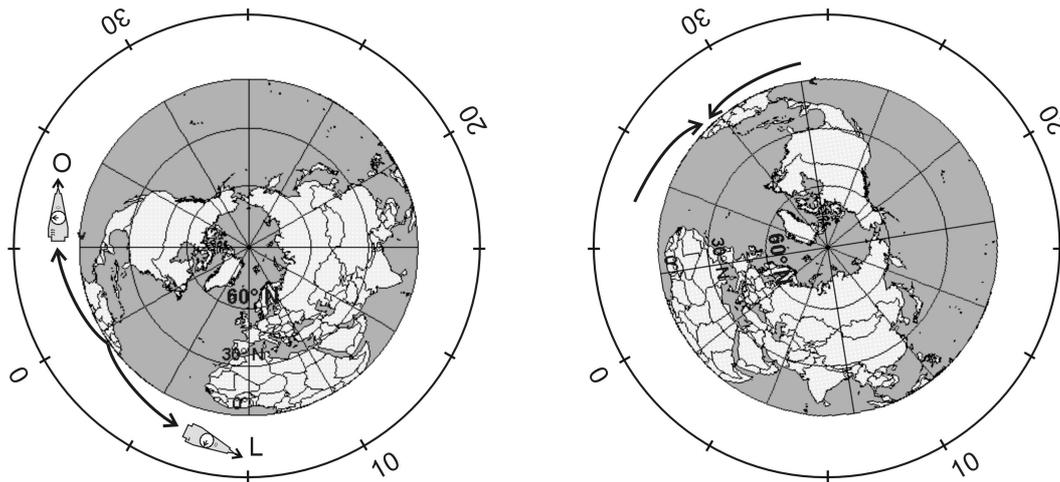


Fig. 2: Ilustração de dois aviões Concorde saindo (esq.) de Alcântara, no equador, um para leste (L) e outro para oeste (O), e retornando (dir.) após a circunavegação em cima do equador. O referencial inercial absoluto é representado externamente, em coordenadas circulares, marcando a circunferência terrestre de 40 mil quilômetros. Os aviões têm mesma velocidade de 600 m/s em relação à atmosfera, e retornam juntos a Alcântara, mas como a Terra gira para leste com velocidade 465 m/s (medida na superfície do equador), o avião que ruma para oeste viaja menos em relação ao referencial absoluto.

Devemos agora aplicar esta fórmula para os três referenciais em movimento. Como a velocidade do avião Concorde é  $v_A = 600$  m/s, e a velocidade de rotação da Terra no equador é  $v_T = 465$  m/s, temos que a velocidade do avião que ruma para leste é  $v_L = 1065$  m/s, e daquele que ruma para oeste é  $v_O = -135$  m/s. A distância percorrida pelos aviões na Terra é igual ao perímetro do planeta: 40.075 km, o que leva a um intervalo temporal de aproximadamente 66.792 s. Adotaremos este valor para o tempo  $\Delta t$  transcorrido no referencial inercial.

Calculemos agora a dilatação temporal em cada um dos referenciais em movimento, usando  $\Delta t' = \Delta t / \gamma$ , onde  $\Delta t = 66.792$  s, e  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. Os resultados estão na tabela abaixo, onde os atrasos nos relógios em movimento estão expressos em nanossegundos, ou  $10^{-9}$  s (um bilionésimo de segundo).

Referencial	Velocidade (m/s)	Fator de Lorentz $\gamma$	Atraso no relógio (ns)
Avião para oeste	-135	$1 + 1 \cdot 10^{-13}$	7
Equador da Terra	465	$1 + 12 \cdot 10^{-13}$	80
Avião para leste	1065	$1 + 63 \cdot 10^{-13}$	421

Com isso, obtemos a previsão de alteração *cinemática* dos relógios em movimento em relação à Terra:

Avião para oeste O:  $\Delta T_O(c) = +73$  ns (piloto ficou mais velho).  
 Avião para leste L:  $\Delta T_L(c) = -341$  ns (piloto ficou mais jovem).

Resta agora adicionar o efeito da dilatação temporal gravitacional. Supondo uma altura média de voo do Concorde de  $h = 15$  km, e tomando  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>:  $\Delta t' = (1 + gh/c^2) \Delta t = (1 + 16 \cdot 10^{-13}) \Delta t$ . Para  $\Delta t = 66.792$  s, isso corresponde a um avanço no relógio de  $\Delta T_O(g) = \Delta T_L(g) = 109$  ns (piloto fica mais velho). Adicionando os efeitos cinemáticos e gravitacionais:

Avião para oeste O:  $\Delta T_O = +182$  ns (piloto ficou mais velho).  
 Avião para leste L:  $\Delta T_L = -232$  ns (piloto ficou mais jovem).

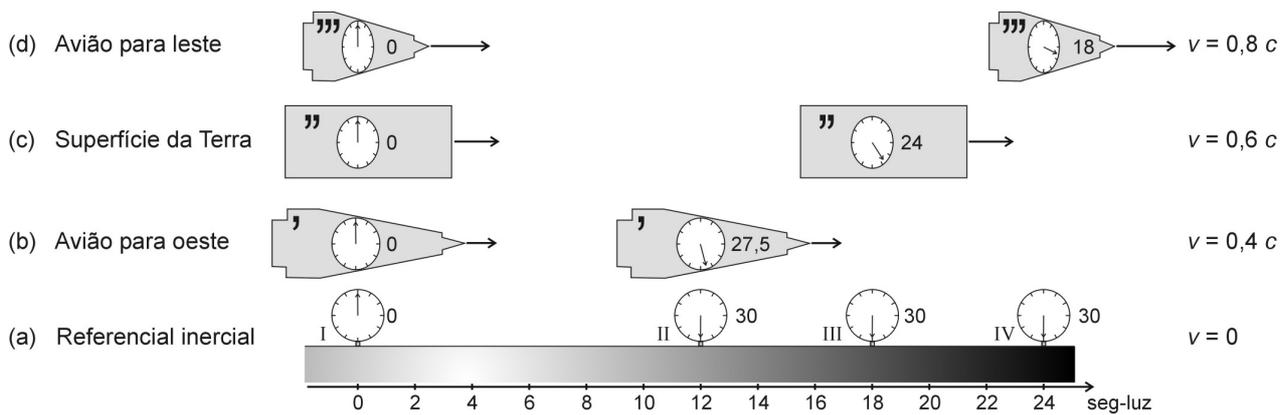


Fig. 3: O movimento circular da figura anterior pode ser desdobrado de maneira linear. O desenho foi feito supondo as velocidades expressas na direita, mas essas velocidades não se aplicam ao experimento dos aviões. (a) Referencial inercial absoluto, com marcação de um intervalo de tempo  $\Delta t = 30$  s entre a posição inicial (à esq.) e a final (à dir.). (b) O avião que viaja para oeste percorre uma distância menor, em relação ao referencial inercial, e seu relógio atrasa 2,5 s em relação ao referencial fixo. (c) Na superfície da Terra também ocorre dilatação do tempo em relação ao referencial inercial, registrando neste exemplo um atraso de 6 s. Este intervalo  $\Delta t''$  é tomado como a referência no experimento dos aviões. (d) O avião que ruma para leste tem a mesma velocidade em relação à Terra que o primeiro avião, só que em sentido oposto. No entanto, o atraso da marcação do seu relógio em relação à Terra ( $\Delta t''' - \Delta t'' = -6$  s) tem valor diferente do adiantamento do relógio do outro avião em relação à Terra ( $\Delta t' - \Delta t'' = +3,5$  s). Essa diferença ocorre porque a dilatação temporal não é proporcional às velocidades, mas ao fator de Lorentz  $\gamma$ .

Os dados de Hafele & Keating forneceram as seguintes previsões teóricas e experimentais:

	Previsão teórica	Medição experimental
Avião para oeste $\Delta T_O$	$275 \pm 21$	$273 \pm 7$
Avião para leste $\Delta T_L$	$-40 \pm 23$	$-59 \pm 10$

O experimento foi repetido diversas vezes.<sup>2</sup> Em 2010, uma equipe do National Physical Laboratory, de Londres, fez um voo de circunavegação para oeste, de Londres passando por Los Angeles, Auckland e Hong Kong. Para uma previsão de  $246 \pm 3$  ns, obtiveram a medição de  $230 \pm 20$  ns. A Fig. 4 mostra como a medição de tempo é obtida com os relógios atômicos de césio.

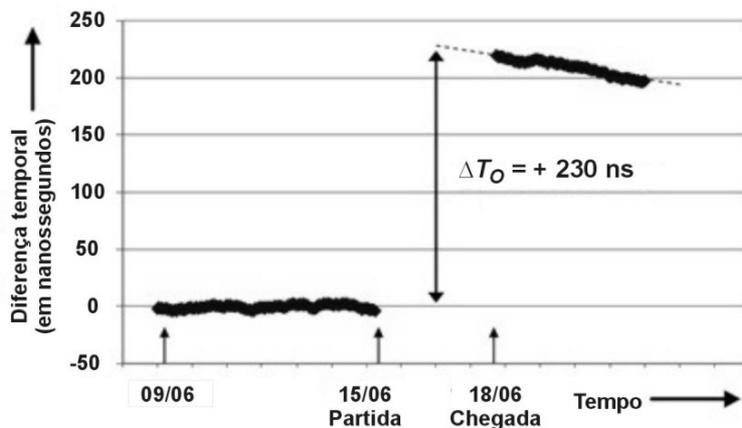


Fig. 4: Diferença temporal entre relógio no avião e relógio em Londres, antes e depois da viagem. Antes da partida, verificou-se que os dois relógios estavam bem sincronizados, com a manutenção de uma diferença nula. Após a chegada, a diferença marcada foi de 230 ns. Nota-se pela inclinação do traço após a chegada que o relógio que viajou no avião passou a correr um pouco mais devagar que aquele em repouso na Terra.

<sup>2</sup> Uma descrição desses experimentos encontra-se em [http://en.wikipedia.org/wiki/Hafele-Keating\\_experiment](http://en.wikipedia.org/wiki/Hafele-Keating_experiment) O relato da versão da NPL está em <http://www.npl.co.uk/news/time-flies>, de onde foi tirada a Fig. 4.