

1. Introdução

Qual é a natureza do tempo? Na Física Quântica, existem pelo menos três grandes problemas envolvendo a noção de tempo. O primeiro é herdado da Física Clássica, e é a questão da irreversibilidade: como justificar a assimetria temporal ("seta do tempo") em sistemas de muitas partículas em face das leis temporalmente simétricas que regem estas partículas? (ver TER HAAR, 1955, p. 311-26; ZEH, 1989, cap. 4). Um segundo problema se coloca na Física de Partículas, e envolve o "teorema CPT" (invariância ante conjugação de carga, inversão de paridade e reversão temporal), e a sugestão de Stueckelberg (1941) e Feynman (1949) de que as antipartículas seriam partículas viajando para trás no tempo (ver REICHENBACH, 1956, p. 262-9; MEHLBERG, 1980, p. 187).

Neste trabalho, porém, consideramos a questão mais discreta sobre a natureza do tempo na Física Quântica restrita a poucos corpos e a domínios não-relativísticos (não trataremos porém da discretização do tempo; para tanto, ver PAPP, 1977). Dois problemas serão examinados:

1) *O observável tempo*. Na Mecânica Quântica toda variável dinâmica (ou "observável", como posição, momento, energia, mo-

¹Trabalho financiado pelo CNPq, área de Educação, processo nº 300429/90-8. Agradeço as sugestões de Carlos Escobar e Luiz Carlos Ryff, e à Fátima Évora que me obrigou a redigir este artigo.

mento angular) pode ser representada por um operador, com exceção do tempo, que é uma coordenada ou parâmetro (um número real com valores bem definidos) na equação de Schrödinger. No entanto, a duração temporal entre eventos é "observável" ou mensurável através dos mesmos procedimentos usados para as outras variáveis dinâmicas. Porque então o tempo também não pode ser representado através de um operador? Veremos as razões para isso, e as tentativas de contornar essa limitação, que levam à definição de autoestados não-ortogonais de tempo. Será que esta dificuldade formal indica que a Teoria Quântica terá que ser refeita? (Seções 2, 3 e 4.)

b) *Superposição de Estados Temporais*. A interpretação usual da Mecânica Quântica aceita a noção de que, antes de ser medido, um evento como uma emissão radioativa pode não estar associado a um instante bem definido, mas sim a uma superposição de instantes. Examinaremos algumas importantes críticas a esta noção revolucionária, mas a defenderemos tendo em vista um recente experimento de interferência proposto por Franson. (Seções 5 e 6.)

2. A inexistência de um operador auto-adjunto de tempo

Devido à simetria entre coordenadas espaciais e temporais na Teoria da Relatividade Restrita, ERWIN SCHRÖDINGER (1931) tentou descrever um operador de tempo análogo ao operador de posição, mas não conseguiu. Em 1935, ele manifestou seu descontentamento da seguinte maneira:

A previsão feita pela Mecânica Quântica contemporânea de que o tempo tem valores bem-definidos é provavelmente um erro. O valor numérico do tempo é como qualquer outro o resultado de uma observação [...] Não deveria ele pertencer a uma variável que em

geral não tem um valor preciso? [...] Na Mecânica Quântica contemporânea, considera-se de maneira a priori que o tempo é conhecido precisamante, apesar de se ter que admitir que qualquer olhada para um relógio provoca um distúrbio incontrollável no movimento do relógio [...] (SCHRÖDINGER, [1935] 1983, p. 166).

John von Neumann também manifestou seu desagrado com essa que seria "a principal fraqueza da Mecânica Quântica", em seu monumental livro publicado em 1932:

[...] um sistema consistindo de 2 partículas tem uma função de onda que depende de $2 \times 3 = 6$ coordenadas espaciais, e de apenas um tempo t ; [mas neste caso] seriam desejáveis dois tempos, por causa da transformação de Lorentz (VON NEUMANN, [1932] 1955, p. 354).

Porque não é possível definir um operador correspondente ao observável tempo? A questão foi tratada explicitamente por Wolfgang Pauli em 1933, em uma nota de rodapé. A esta altura do texto, talvez o leitor com pouca familiaridade com a Física Quântica queira consultar o Apêndice para uma introdução às noções de estado e observável em Mecânica Quântica.

PAULI ([1933] 1980, p. 63) mostrou que a existência de um operador de tempo que fosse auto-adjunto implicaria autovalores contínuos para o operador de energia, entre $-\infty$ e $+\infty$. Mas o espectro de energia para sistemas ligados é discreto, e mesmo no caso de uma partícula livre o espectro tem um limite inferior (senão, haveria um problema de estabilidade do sistema), não se admitindo assim valores negativos de energia. Portanto, não é possível haver um operador de tempo auto-adjunto. Tendo em vista este resultado, o tempo se limitaria a ser um parâmetro numérico na equação de Schrödinger (ou em equação equivalente).

A discussão sobre a possibilidade de um operador de tempo foi então encerrada, sendo que nas décadas seguintes a preocupação com respeito ao tempo se concentrou na interpretação correta da relação de indeterminação envolvendo tempo e energia, como veremos na seção seguinte. Veremos adiante, porém, que a discussão sobre o operador de tempo seria reaberta nos anos 60.

3. A relação de indeterminação de tempo e energia

As relações de indeterminação (ou incerteza) introduzidas por Werner Heisenberg, mesmo para o caso envolvendo posição e momento (ver Apêndice), estão sujeitas ainda hoje a bastante discussão do ponto de vista interpretativo. Uma das controvérsias básicas é estabelecer (i) se as relações se referem a limitações intrínsecas na definibilidade de grandezas conjugadas em um sistema em estado puro (e à impossibilidade de medi-las simultaneamente, mesmo que de maneira não fidedigna), ou (ii) se elas apenas se referem aos desvios padrões de um coletivo de medições conjuntas das duas grandezas (sendo que tais medições simultâneas seriam realizáveis na prática). O estudo desta questão requereria um artigo inteiro, e não adentraremos nela aqui (ver DE MUYNCK *et al.*, 1994, p. 1600-4).

Mesmo ignorando estes problemas envolvendo as relações de indeterminação em geral, um problema adicional surge quando se considera a relação obtida por HEISENBERG (março de 1927) envolvendo energia e tempo, que escreveremos como:

$$\delta E \cdot \delta t \geq \hbar/2 . \quad (1)$$

No Apêndice indicamos, no caso de medições de posição x e de momento p_x , como a relação de indeterminação $\delta x \cdot \delta p_x \geq \hbar/2$

pode ser interpretada como uma relação envolvendo desvios padrões de operadores \hat{X} e \hat{P}_x , obtida por Kennard em julho de 1927: $\Delta\hat{X}\cdot\Delta\hat{P}_x \geq \hbar/2$. Isso sugere uma relação envolvendo operadores de energia e de tempo:

$$\Delta\hat{E}\cdot\Delta\hat{T} \geq \hbar/2. \quad (2)$$


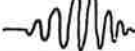


No entanto, como não é possível definir um operador auto-adjunto de tempo, a eq.(2) careceria de sentido. Como interpretar então as relações de indeterminação para energia e tempo?

Um relato histórico de diferentes interpretações para a eq.(1) é dada por JAMMER (1974, p. 132-156), e também por AHARONOV & BOHM (1961). As principais propostas estão resumidas na Tabela na página seguinte.

A confusão trazida por este grande número de propostas é esclarecida de modo satisfatório por G.R. ALLCOCK (1969, p. 256-61, 334-7), da Universidade de Liverpool, e por AHARONOV & BOHM (1961). Dividamos estas interpretações da relação de indeterminação para energia e tempo em cinco grupos.

1) *Relação envolvendo a indeterminação no tempo de chegada.* Allcock aponta a interpretação original de NIELS BOHR ([1928] 1934, p. 59) como sendo uma "relação de incerteza genuína", apesar de fundada em argumentos qualitativos. Bohr considerou um pacote de onda de luz limitado pela relação $\delta v \cdot \delta t \geq 1$, válida na física ondulatória clássica, e utilizando a relação quântica $E = h\nu$ obteve $\delta E \cdot \delta t \geq h$. A indeterminação no tempo corresponde ao tempo de transcurso do pacote através de um ponto, donde Allcock argumenta que a variável tempo pode ser interpretada como o "tempo de chegada" de uma partícula em um ponto. Bohr não se deteve na questão de como medir este tempo de chegada, questão esta que é um dos problemas atacados por Allcock em seu longo artigo.

Tabela 1: Abordagens à relação de indeterminação para energia e tempo.

AUTOR	MODELO	δE	δt
HEISENBERG (1927)	Exp. de Stern-Gerlach; 	Indeterminação na energia de partícula com spin 1/2 em um campo magnético.	Tempo de permanência entre os ímãs.
BOHR (1928)	Pacote de onda:  $\delta v \cdot \delta t = 1$ mais $E = h\nu$.	δv : Faixa de frequências formando o pacote de onda.	Tempo de transcurso do pacote através de um ponto.
WEISSKOPF & WIGNER (1930)	 Emissão radiativa	Largura da linha espectral (desvio padrão de E).	Tempo médio para a ocorrência do decaimento.
Einstein & Bohr (1930) (in BOHR, 1949)	Emissão de fóton numa caixa: 	Resolução na energia da radiação emitida.	Tempo no qual a fenda de emissão fica aberta.
LANDAU & PEIERLS (1931)	2 medições sucessivas em uma partícula-sonda que interage por choque com a partícula-objeto.	Diferença $E_0 - E_1$ entre as energias medidas.	Duração δt da interação, que limita o intervalo de tempo entre as medições.
MANDELSTAM & TAMM (1945)	Coletivo de sistemas: $\Delta t = \frac{\Delta \hat{R}}{ d\langle \hat{R} \rangle / dt }$	Desvio padrão nas medições de energia.	Intervalo em que o valor médio de \hat{R} varia em $\Delta \hat{R}$.
FOCK & KRYLOV (1947)	Aceitam L&P, e criticam M&T e W&W.	Transferência de energia entre objeto e aparelho (partícula-sonda).	Incerteza no instante em que a partícula-sonda passa por um ponto.
ENGELMANN & FICK (1959)	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ envolve operadores \hat{E} e \hat{T} .	Desvio padrão do operador \hat{E} .	Desv. padrão do "operador" \hat{T} .
AHARONOV & BOHM (1961)	Contra-exemplo a $(E_0 - E_1) \cdot \delta t \geq \hbar/2$ de L&P e K&F.	Indeterminação na energia do "relógio" (aparelho de med.).	Indeterminação no instante da medição, segundo o relógio.
ALLCOCK (1969)	Operacionalmente, o tempo de chegada tem erro $\delta t \sim \hbar/V_0$.	Soma do δE usual e de uma inacurácia V_0 na medição de t .	Indeterminação na medição do tempo de chegada.
BUNGE (1969)	Relação $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ não faria parte da MQ.	Desvio padrão nas medições de energ.	Desvio padrão forneceria $\Delta t = 0$.
WIGNER (1972)	Energia é positiva, donde $\delta E \cdot \delta t \geq 3\hbar/2$.	Indeterminação na energia da partícula.	Indeterminação no tempo de chegada.
OLKHOVSKY <i>et al.</i> (1974)	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ envolve operadores \hat{E} e \hat{T} .	Indeterminação na medição de energia.	Duração da interação da medição.

O problema da complementaridade da energia e tempo em mecânica quântica dá bastante ensejo a mal-entendidos e confusão, devido ao fortuito aparecimento conjunto de uma variável energia e um parâmetro tempo em situações que nada implicam com respeito à determinação simultânea de uma variável dinâmica de tempo e uma energia. A literatura contém de fato várias relações tempo-energia que não [a de Bohr e a de Mandelstam & Tamm] [...], todas as quais têm falhas ou induzem de alguma maneira em erro (ALLCOCK, 1969, p. 259).

2) *Relação envolvendo o tempo de interação com um analisador estático.* Na derivação original de HEISENBERG ([1927] 1983, p. 67-68), δt corresponde ao tempo que um átomo permanece entre os imãs de um aparelho de Stern-Gerlach, e não a uma medição do instante de ocorrência de um evento. A indeterminação δt poderia neste caso ser interpretada como o intervalo de tempo em que o átomo interage com o aparelho de medição, ou mais precisamente, com o "analisador" (o imã neste caso, uma grade de difração em um experimento óptico, etc.). Allcock chama tal arranjo experimental de "estático", sendo que os componentes do pacote com diferenças de frequência maiores do que $\delta E/h$ são separados espacialmente. Neste caso, δt estabelece um limite inferior para a duração de uma medição capaz de medir a energia com uma precisão igual a δE .

3) *Relação envolvendo a diferença de energia de uma partícula-sonda.* Contrastando com o arranjo estático de aparelhagem, LANDAU & PEIERLS ([1931] 1983, p. 467-8) propuseram um arranjo "dinâmico" no qual uma partícula-sonda interage por impulsão com a partícula-objeto, interação esta que dura um intervalo δt controlável pelo experimentador. Argumentaram então que a energia da sonda pode ser medida com precisão arbitrária em qualquer instante. O termo δE da eq.(1) não corresponderia assim

à precisão da medição, mas à diferença $E_2 - E_1$, onde E_1 é a energia da sonda antes da interação, e E_2 a energia após a interação impulsiva. Mais tarde, FOCK & KRYLOV (1947) concordariam que δE deve ser interpretado como a transferência de energia entre objeto e aparelho (sonda), mas definiram δt mais precisamente como uma indeterminação no tempo de chegada. YAKIR AHARONOV & DAVID BOHM (1961), porém, forneceram um convincente contra-exemplo à tese desses autores de que toda medição com duração δt provoca uma transferência de energia δE satisfazendo a eq.(1).

4) *Relação envolvendo o valor médio de um operador não constante.* A abordagem de MANDELSTAM & TAMM (1945) define as indeterminações como desvios padrões de um coletivo de medições, conforme a eq.(2). Mas como não há um operador auto-adjunto de tempo do qual se possa derivar $\Delta \hat{T}$, eles definiram este desvio padrão indiretamente, conforme indicada na Tabela 1, a partir de um operador auto-adjunto \hat{R} que não é uma constante de movimento (por exemplo, a posição de uma partícula em movimento). A crítica que se faz a esta abordagem é que ela não se aplica a medições individuais, crítica que Fock & Krylov estenderam também à interpretação de δE como a largura de linha espectral, que havia sido sugerida por WEISSKOPF & WIGNER (1930). Além disso, se o sistema (fechado) em questão estiver em um estado estacionário (um autoestado de energia), a relação de indeterminação (eq. 2) de Mandelstam & Tamm não se aplica.

5) *Relação envolvendo os desvios padrões dos operadores de energia e tempo.* Veremos a seguir que apesar das limitações impostas pelo resultado de Pauli, vários autores passaram a interpretar a eq.(2) de maneira canônica, dentro de um formalismo de medições entendido.

4. Explorações de um operador de tempo com autoestados não-ortogonais

Em 1959, ENGELMAN & FICK reabriram a discussão sobre a possibilidade de se definir um operador de tempo na Mecânica Quântica. Eles fizeram uma distinção entre "dois tempos". O "tempo interno" corresponderia ao que é observável, como os tempos de chegada de partículas, e está sujeito a flutuações; o "tempo externo" seria o parâmetro t com valores contínuos que aparece nas equações de evolução quânticas. Tais definições devem ser distinguidas do "tempo interno" de AHARONOV & BOHM (1961, p. 1652) (seguindo as idéias de Fock & Krylov), que se refere ao tempo definido pelas variáveis dinâmicas do objeto quântico (*à la* Mandelstam & Tamm; por exemplo, a meia-vida de um estado excitado), sendo que para eles o tempo externo corresponderia ao instante em que a medição ocorreu, conforme representado por um observável de tempo no "relógio" (no aparelho de medição).

Juntando as propostas acima, somos levados a uma distinção entre três tempos: 1) O *tempo paramétrico* é expresso pelo parâmetro t das equações dinâmicas. 2) O *tempo interno* seria definido para um sistema quântico fechado, a partir de suas variáveis internas. 3) O *tempo de ocorrência* é obtido a partir de medições, como os tempos de chegada de partículas, e poderia ser considerado um observável do aparelho de medição. A terminologia das definições 1 e 3 é proposta por Allcock.

É filosoficamente interessante este desdobramento em *dois ou três tempos*, distinção esta que talvez seja necessária no caso quântico. Propostas um pouco diferentes para definir dois tempos na mecânica quântica foram feitas por PARK (1986), que distinguiu entre um tempo absoluto e um tempo relativo (leibniziano), e por

STAPP (1986), que distinguiu o tempo paramétrico, a nível de potencialidades, do "tempo de processo" (semelhante ao de ocorrência), a nível dos fatos atualizados. ZIMMERMAN (1966), por sua vez, baseado em resultados de SALECKER & WIGNER (1958) sobre o limite inferior para a massa de um relógio, propôs que o conceito de tempo, assim como o de espaço, não se aplicam a nível microscópico, surgindo somente a nível macroscópico como uma grandeza termodinâmica.

Mas voltando a Englemann & Fick, a questão por eles lançada era a de expressar formalmente o tempo de ocorrência da Física Quântica, através de um operador de tempo. Diversos autores atacaram o problema, e passaram a definir operadores de tempo que, devido às limitações impostas pelo argumento de Pauli, não são a rigor auto-adjuntos. HARRY PAUL (1962), por exemplo, explorou, para uma partícula livre de massa m , o operador

$$\hat{T} = \frac{1}{2}m(\hat{X}\hat{P}_x^{-1} + \hat{P}_x^{-1}\hat{X}), \quad (3)$$

que na vizinhança de $p_x = 0$ não é auto-adjunto. Tal singularidade, porém, não intimidou AHARONOV & BOHM (1961, p. 1652), que a consideraram "sem importância" em face dos altos valores dos momentos das partículas envolvidas nas medições de tempo por eles estudadas. Ou seja, no limite de altas energias um operador auto-adjunto de tempo poderia ser definido para partículas livres, conforme a eq.(3).

A rigor, no entanto, a eq.(3) não corresponde a um operador auto-adjunto. Várias propriedades deste operador, que na representação de energia se simplifica para:

$$\hat{T} = ih\partial/\partial\hat{E}, \quad (4)$$

foram exploradas por PAUL (1962), ENGLEMANN & FICK (1964), OLKHOVSKY *et al.* (1974), HOLEVO (1982, p. 130-6), e por outros autores. Uma das conseqüências desses estudos é a sugestão de que o formalismo de medições da Mecânica Quântica deveria ser estendido, de forma a permitir a definição de observáveis que correspondessem a operadores não auto-adjuntos. De fato, uma extensão do formalismo de medições seria realizado na década de 70².

Neste contexto, a relação de indeterminação para energia e tempo (eq. 2) pode ser interpretada da maneira canônica, envolvendo desvios padrão dos operadores de energia e de tempo, dentro de um formalismo de medições estendido (correspondendo à quinta interpretação listada na seção anterior). No entanto, o fato do operador de tempo não ser auto-adjunto deve ser analisado com cuidado, dado que isto tem uma conseqüência significativa: *os autoestados correspondentes a este operador não são ortogonais*.

Bases supercompletas de autoestados não-ortogonais são comuns em teorias de campos, constituindo por exemplo os chamados "estados coerentes", estados de indeterminação mínima, importantes na descrição da luz laser, e que estabelecem um limite clássico natural para sistemas quânticos (GLAUBER, 1964, p. 110). Tais estados são autoestados do operador de destruição (que está associado à retirada de um fóton do campo), que não é auto-adjunto e não é considerado um observável, possuindo autovalores

²Estes avanços foram introduzidos por Davies & Lewis (1970) e Holevo (1972), e adotados por muitos outros autores. Em poucas palavras, uma "medição generalizada" não pode ser caracterizada por um único operador, definido a partir de um conjunto de projetores ortogonais (que comutam), conjunto este que é "completo" (soma dos projetores é igual a 1); os observáveis das medições generalizadas são caracterizados por um conjunto completo de projetores, mas estes não são necessariamente ortogonais (podem não comutar) (ver PESSOA, 1994).

complexos. O caso do operador de tempo é diferente, porém, porque pretende-se que ele corresponda a um observável passível de medição³.

Autores como ALLCOCK (1969, p. 263-4) consideram a propriedade de não ser auto-adjunto inaceitável em um formalismo quântico de medição. Suas críticas a esta propriedade podem ser usadas como uma crítica a todo o programa de medições generalizadas mencionado acima. (O debate a ser suscitado por esta crítica parece ainda não ter sido travado na literatura, mas não há espaço para tentarmos aqui uma análise da questão.)

O problema básico tratado por Allcock em seu rico artigo é se o conceito ideal clássico de *tempo de chegada* (um caso especial de tempo de ocorrência) pode ser definido na Mecânica Quântica Não-Relativista, ou seja, se é possível definir, para uma partícula, estados quânticos que possuam um tempo de chegada bem definido, constituindo *autoestados* do operador de tempo.

Consideremos um suposto autoestado $|\Psi_{\tau}(E)\rangle$ do operador de tempo (eq. 4) na representação de energia, correspondente ao autovalor de tempo de chegada τ . Uma propriedade fundamental a ser satisfeita por tais estados é a de *translação temporal*, que diz que um autoestado correspondente ao autovalor $\tau+T$ pode ser escrito como:

$$|\Psi_{\tau+T}(E)\rangle = e^{iET/\hbar} |\Psi_{\tau}(E)\rangle. \quad (5)$$

Na primeira parte de seu artigo, ALLCOCK (p. 253-85) investiga se é possível definir tais autoestados ortogonais para o opera-

³A tentativa de considerar autovalores complexos para o operador tempo parece não ter sido considerado na literatura, apesar de *it* ter um papel relevante na Teoria da Relatividade Restrita.

dor de tempo considerando dois casos: (i) o caso em que o estado da partícula livre é definido em um espaço de Hilbert usual, de forma que energias negativas não são definidas; (ii) o caso em que a partícula se origina de uma fonte, donde se mostra que o espectro de energia varia continuamente entre $-\infty$ e $+\infty$.

O primeiro caso reconfirmou o resultado de Pauli. Supondo a propriedade de translação temporal e a conservação de probabilidade, Allcock mostrou que não é possível definir autoestados ortogonais, e portanto, dentro do formalismo padrão de medições quânticas, não é possível definir um operador de tempo.

O segundo caso forneceu, curiosamente, um resultado mais forte, independente de suposições do formalismo padrão: a probabilidade de que uma partícula emitida seja detectada em algum instante futuro (qualquer instante entre t_0 e $t = +\infty$), no semi-espaço $x > 0$ considerado, não pode ser decomposta na soma de probabilidades de detecção em intervalos de tempo que satisfaçam a propriedade de translação temporal. Isto generalizou o resultado de Pauli para situações em que valores negativos de energia são permitidos.

Na segunda parte de seu artigo, Allcock considera um modelo concreto e simples de aparelho de medição, e conclui que existe uma indeterminação δt no tempo de chegada de uma partícula que é irreduzível para uma dada eficiência de detecção do aparelho:

$$\delta t \approx \hbar/V_0, \quad (6)$$

onde V_0 é o valor máximo de um certo parâmetro do aparelho. Tal seria uma indeterminação intrínseca ao próprio conceito de tempo⁴.

⁴Conforme apontado por Allcock, isto é análogo à indeterminação δx na posição de um fóton, exposto por BOHM (1951, p. 107-11). Sobre este problema da localizabilidade de partículas, levantado por Newton &

As conseqüências que ALLCOCK (1969, p. 274-5, 305-6) retira disto são bastante interessantes para a filosofia da física: a própria noção de "realidade potencial" que pode ser associada ao vetor de estado $|\psi\rangle$, dado que $|\psi\rangle$ não se altera conforme o observável que o experimentador resolve medir, é posta em cheque pelo seu resultado de que a presença do medidor do tempo de chegada afeta as probabilidades de detecção.

Em suma, vemos na literatura recente uma tendência a se aceitar a definição de um operador de tempo, operador este que não é auto-adjunto. Como conseqüência, têm-se autoestados que não são ortogonais, mas isto não parece preocupar os que trabalham na extensão do formalismo de medições quânticas. No entanto, análises com conteúdo físico mais direto, como o trabalho de Allcock, deixam em aberto o desafio de se interpretar corretamente tais autoestados não-ortogonais.

Finalizando esta seção, exploremos brevemente algumas questões suscitadas. (i) Parece certo afirmar que se uma partícula estiver em um autoestado $|\psi_{\tau}(E)\rangle$, existe uma probabilidade não-nula de detectar seu tempo de chegada em um instante que não τ (devido à não-ortogonalidade, e à eq. 6). (ii) Se o tempo de chegada de uma partícula for medido com boa precisão sem destruir a partícula, qual seria o estado temporal subsequente da partícula? Corresponderia ao autoestado temporal associado ao autovalor obtido (de maneira que o postulado da projeção poderia ser aplicado), trasladado temporalmente para dar conta do tempo T transcorrido desde a medição? Digamos que sim. (iii) Mas uma medição no autoestado $|\psi_{\tau+T}(E)\rangle$ poderia não fornecer o autovalor T , devido a (i). Poderia fornecer um resultado maior do que T ?

Wigner (1949), ver discussão e referências em WIGNER (1983, p. 310-2), KRAUS (1977) e BROYLES (1980).

Isto poderia talvez violar o limite superior para a velocidade da luz, no caso de medições em fótons.⁵ (iv) Poderia fornecer um resultado menor do que T ? Para $T \rightarrow 0$ isto poderia levar a uma espécie de reversão temporal?

Tais questões talvez pudessem ser contornadas considerando-se a natureza do aparelho de medição, mas apontam para certas dificuldades inerentes à noção de autoestados não-ortogonais de um observável.

5. *Superposição de estados sucessivos no decaimento radiativo*

Os estudos sobre uma possível definição de autoestados temporais indica ser plausível a noção de *superposição de estados temporais*. Um exemplo de tal superposição seria uma partícula preparada em um estado puro, tal que a amplitude de probabilidade de seu tempo de chegada tivesse valores não-nulos para pelo menos dois instantes bem separados. Tal conceito de superposição de estados temporais não é muito usado na literatura, já que ele pode em geral ser traduzido para uma superposição de estados bem localizados espacialmente. Discutiremos isso com mais detalhes na seção 6, quando virmos uma realização experimental de superposições temporais. Nesta seção estudaremos a descrição do decaimento radioativo (ou da emissão radiativa), que envolve uma superposição de estados que se sucedem no tempo.

Considere um sistema instável como um núcleo radioativo ou um estado atômico excitado "metaestável" A que decai em duas componentes B e C : $A \rightarrow B + C$. Inicialmente o sistema está em

⁵Tal violação, que ocorre para fótons individuais, tem sido explorada experimentalmente para pacotes de onda (que não são autoestados de tempo) "achatados" por um processo de tunelamento (ver CHIAO *et al.*, 1993).

um estado $|\phi(0)\rangle = |\phi_A\rangle$, mas depois de um tempo t o seu estado é descrito como:

$$|\phi(t)\rangle = a(t) \cdot |\phi_A\rangle + b(t) \cdot |\phi_{BC}\rangle. \quad (7)$$

O que esta equação afirma é que o sistema está em uma superposição de um estado não-decaído $|\phi_A\rangle$ e de um estado decaído $|\phi_{BC}\rangle$. Se no instante t uma medição for realizada para identificar se o sistema já decaiu, a probabilidade de que ele tenha decaído é dada por $|b(t)|^2$. O curioso é que antes da medição, de acordo com a mecânica quântica usual, o sistema ainda não "escolheu" pelo decaimento ou não: ele está em uma superposição, um estado de potencialidade sem instante de decaimento definido. A pergunta "o sistema já decaiu?" deve assim, segundo a interpretação usual, ser respondida por: "esta pergunta não tem resposta", e não por: "sim ou não, mas ainda não sabemos".

A eq.(7) pode ser considerada uma superposição de estados temporais no sentido de que os estados pré-decaimento $|\phi_A\rangle$ e pós-decaimento $|\phi_{BC}\rangle$ se sucedem temporalmente. Porém, o instante de decaimento que marca a separação entre estes dois estados não é bem definido. Assim, chamaremos a eq.(7) de uma *superposição de estados sucessivos*. Veremos em breve como obter superposições de estados correspondentes a diferentes instantes de emissão de uma mesma partícula.

Se a eq.(7) se referisse a um sistema isolado, no qual os módulos dos coeficientes $a(t)$ e $b(t)$ oscilassem entre 0 e 1 com o passar do tempo paramétrico, talvez a interpretação usual (de que não existe um instante de emissão bem definido) não soasse tão paradoxal. Apenas no instante da medição, quando um distúrbio incontrolável fosse provocado no sistema, ele colapsaria para o esta-

do não-decaído ou para o estado decaído. Mas no exemplo de um núcleo radioativo ou de um átomo excitado, podemos imaginar que tal sistema esteja muito distante, por exemplo na estrela de Sirius. Será que mesmo neste caso ele permanece no estado descrito pela eq.(7) até que o fóton seja observado em um telescópio na terra, constituindo um colapso?

O operador hamiltoniano que caracteriza o núcleo radioativo descrito pela eq.(7) foi introduzido por WEISSKOPF & WIGNER (1930), e faz com que a amplitude de probabilidade de decaimento aumente monotonicamente com o passar do tempo paramétrico. Este hamiltoniano, porém, não é auto-adjunto. Isso indica que tal núcleo (ou um átomo que decai) não constitui um sistema isolado ou fechado, mas interage com o ambiente.

O modelo de um núcleo radioativo estando em uma superposição de estado não-decaído e decaído foi usado por SCHRÖDINGER ([1935] 1983, p. 156-7) para criticar a própria mecânica quântica, em seu "paradoxo do gato", que era uma crítica à completeza da teoria quântica. ALBERT EINSTEIN (1949, p. 667-71) retomou com maiores detalhes esta crítica à interpretação usual da eq.(7), em uma defesa de uma interpretação dos coletivos (ensembles) estatísticos para a mecânica quântica. A interpretação ortodoxa desta teoria considera que o vetor de estado (ou a função de onda) fornece uma descrição completa de um sistema individual, mas como a eq.(7) não determina o instante de decaimento do sistema, e como (segundo nossa intuição clássica) tal instante deve existir, Einstein mais uma vez concluiu que a teoria quântica é incompleta.

A situação aparentemente paradoxal, associada a um núcleo descrito por uma superposição de estados não-decaído e decaído, pode se tornar mais paradoxal ainda quando se adota um proce-

dimento teórico conhecido como *retrodição*. A partir do momento t_2 em que a partícula é detectada, pode-se calcular o tempo T que ela demorou para viajar do núcleo radioativo até o detector, e então afirmar que o evento de emissão ocorreu no instante $t_1 = t_2 - T$. Veja que interessante: no instante t_1 (e em instantes $t < t_1 + T$), a Teoria Quântica afirma que o estado do núcleo naquele instante é descrito pela eq.(7); porém, após a medição em t_2 , a retrodição nos leva a afirmar que a partir de t_1 o estado já era $|\phi_{BC}\rangle$! É como se o passado se alterasse com o passar do tempo futuro!⁶ Este paradoxo foi explorado por Wheeler, no contexto de superposições de estados de posição (experimento de escolha demorada), levando-o à conclusão de que:

É errado pensar naquele passado como "já existindo" em todos os detalhes. O "passado" é teoria. O passado não tem existência enquanto ele não é registrado no presente. Ao decidirmos quais perguntas o nosso equipamento quântico de registro irá fazer no presente, temos uma escolha inegável sobre o que temos o direito de perguntar sobre o passado (WHEELER, 1983, p. 194).

Uma maneira de evitar tais paradoxos é rejeitar a validade da retrodição.

Mais recentemente, TONY SUDBERY (1986), da Universidade de York na Inglaterra, retomou a discussão sobre o decaimento,

⁶Para tornar esta afirmação rigorosa, é preciso definir bem a interpretação da Mecânica Quântica sendo usada. Ao se incorporar a retrodição em uma interpretação ondulatória, que atribui um certo tipo de realidade para o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ (cuja existência em t corresponderia a uma proposição X válida em t), é possível argumentar que um dos quatro axiomas básicos da lógica temporal (RESCHER & URQUHART, 1971, p. 55) é violado, permitindo uma "retrocausalidade". Viola-se o axioma de que "a verdade de X implica que será verdade, para todos os instantes futuros, que em algum instante do passado X foi verdadeiro".

em um contexto teórico muito mais elaborado do que seria possível nos anos 50.⁷ Um dos resultados mais simples de Sudberry é um refinamento da eq.(7), resultado este que fornece não apenas as amplitudes de probabilidade de que o sistema tenha decaído e de que não tenha decaído, mas também as amplitudes de que tenha decaído em tal ou qual instante:

$$|\phi(t)\rangle = a(t) \cdot |\phi_A\rangle - i\varepsilon \int_0^t dt' a(t') |\phi_{BC}(t-t')\rangle. \quad (8)$$

O estado é uma superposição de todos os estados possíveis no tempo t : ele pode não ter decaído e ainda estar no estado $|\phi_A\rangle$, ou pode ter decaído em algum instante t' e em seguida ter evoluído no canal de decaimento por um tempo $t-t'$. A amplitude para que ele ainda não tivesse decaído no tempo t' é $a(t')$, e a amplitude para que o decaimento ocorra no tempo dt' é $-i\varepsilon dt'$; estes fatores multiplicam o termo apropriado na superposição (SUDBERRY, 1986, p. 72).

Se por alguma razão $a(t) \approx 0$, podemos interpretar o termo que envolve a integral como sendo uma superposição de estados temporais, cada qual correspondendo a um instante de emissão diferente, e portanto a um tempo de chegada diferente.

No entanto, Sudberry não se atem à interpretação ortodoxa da eq.(8), mas adota a interpretação de que tal equação fornece as probabilidades de que o decaimento tenha de fato ocorrido (neste

⁷No último quarto de século, a Teoria Quântica aprimorou em muito sua descrição da emissão radiativa, "vestindo" o átomo em questão com o campo eletromagnético à sua volta. Certos paradoxos surgiram, como o efeito Zenão quântico (ou da "panela vigiada") (MISRA & SUDARSHAN, 1976), o efeito "cão de guarda" (KRAUS, 1981) e o telégrafo quântico (ou paradoxo da "prateleira óptica") (ERBER *et al.*, 1989), cuja explicação aprimorou os modelos quânticos e a teoria de medições contínuas.

ou naquele instante) ou não. Ele nega explicitamente, desta maneira, que a noção de superposição de estados temporais faça sentido (pelo menos na descrição do decaimento radiativo), e propõe um postulado adicional aos axiomas da Mecânica Quântica para proibir isso. Isso resulta em uma interpretação próxima à dos coletivos estatísticos, mas Sudberry também faz questão de criticar esta última. De qualquer forma, sua proposta significa que as eqs.(7) e (8) representam não um estado puro, mas uma mistura estatística (ver Apêndice).

Um importante desafio foi assim lançado contra a interpretação usual da eq.(7), mas a questão parece ainda não ter sido debatida na literatura. Uma maneira de testar a tese de Sudberry seria elaborar um experimento de interferência que verificasse se a superposição da eq.(7) é coerente (um estado puro) ou se é uma mistura (em geral é sempre possível distinguir estados puros de misturas). De fato, o experimento a ser descrito na seção seguinte parece refutar essa tese de Sudberry.

Por outro lado, seria possível que a proposta de Sudberry fosse válida sem que se tivesse que violar os princípios da mecânica quântica usual. Vimos que o hamiltoniano de Weisskopf-Wigner não é auto-adjunto, o que indica que um núcleo radioativo interage com seu ambiente externo. Ora, sabe-se a partir de trabalhos do último quarto de século (ver por exemplo ZEH, 1989, p. 90-93) que a ação do ambiente pode ocasionar uma "decoerência" em um sistema aberto, o que rapidamente transformaria o estado puro da eq.(8) em uma mistura do tipo sugerido por Sudberry.

Em suma, podemos considerar que um núcleo radioativo ou um átomo excitado em um estado metaestável são exemplos de uma superposição de estados temporais sucessivos (ao contrário do

que sugeriu Sudberry), pelo menos antes de sofrer um possível efeito de decoerência.

6. Uma descrição do experimento de Francon através de superposições temporais

Seria possível demonstrar que um átomo excitado não tem um tempo de emissão bem definido, ao contrário do que sugeriram Einstein, Sudberry e outros? Mostraremos que sim, a partir do experimento de interferência proposto por JAMES FRANCON (1989), da Universidade Johns Hopkins em Maryland. Esta foi uma das primeiras propostas de "interferência de duas partículas" (ver resumos da área em: HORNE *et al.*, 1990; GREENBERGER *et al.*, 1993).

Antes de considerarmos duas partículas, porém, investiguemos como realizar um experimento com apenas *um* fóton emitido de um átomo excitado. Para tanto, faremos uso de um interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico (Fig. 1).⁸ Para entender o funcionamento deste aparelho, imagine inicialmente que a luz é monocromática e incide como um único trem de ondas contínuo. Ao incidir no primeiro espelho semi-transparente S_1 , o trem de ondas se divide em dois, um indo pelo caminho curto C e o outro pelo longo L. Eles se recombinam no outro espelho semi-transparente S_2 . O percurso do componente L pode ser ajustado variando-se as posições dos espelhos E_1 e E_2 . É possível assim fazer com que os trens de onda que se dividiram em S_1 se superponham construtivamente em S_2 , de forma que todo o feixe de luz incida em D_1 (neste caso diremos que a defasagem dos componentes é φ

⁸O estudo deste interferômetro fornece uma excelente introdução didática aos aspectos conceituais da Física Quântica. Ver WHEELER (1983).

= 0). Mostra-se neste caso que os dois componentes que rumam para D_2 se superpõem destrutivamente, de forma que nada é medido neste detector. É possível também ajustar o comprimento L , deslocando-o meio comprimento de onda, ou seja, $\pi c/\omega$ (onde c é a velocidade e ω a frequência angular da luz), de forma que todo o feixe rume para D_2 (neste caso, $\varphi = \pi$). Se varreremos a defasagem continuamente, obteremos uma típica figura de interferência senoidal.

Imagine agora que a luz que incide no interferômetro é um pulso curto (ou seja, seu comprimento de coerência é muito menor que a diferença de percurso $L - C$). Para um pulso emitido em um instante bem determinado, nunca ocorrerá interferência, pois o caminho L é maior do que o C , e os dois componentes de tal pulso, separados em S_1 , nunca se encontrariam em S_2 . A probabilidade de detecção em D_1 seria 50%, assim como em D_2 .

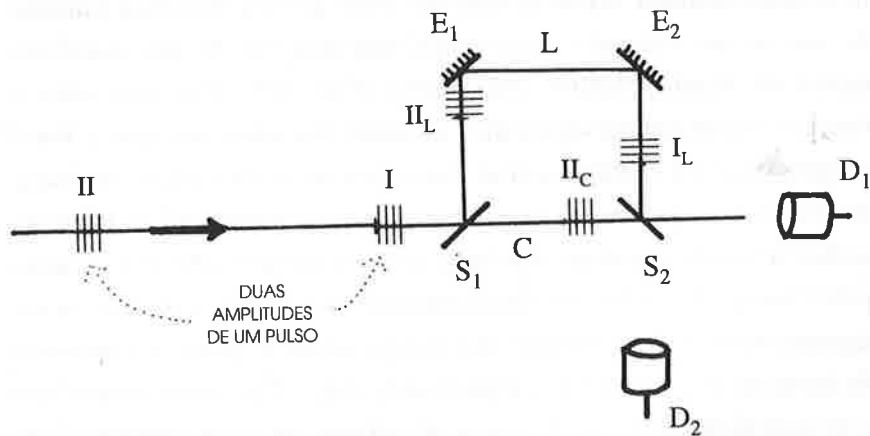


Figura 1: Interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico. Conforme a diferença de caminhos $L - C$, um trem de ondas contínuo sofre interferência em S_2 , com 100% do feixe indo para D_1 . Um pulso curto não consegue interferir consigo mesmo, e apenas 50% dos fótons incidentes caem em D_1 . Porém, se o pulso carregando um único fóton tiver duas amplitudes I, II (uma "dupla fenda temporal"), emitidos com uma diferença temporal de exatamente $\Delta t = (L - C)/c$, uma componente de cada amplitude interferirão entre si, de forma que 75% do feixe ruma para D_1 .

Haveria alguma maneira de se obter interferência construtiva com apenas um fóton associado a um pulso curto, como o que é emitido de um átomo? Ora, basta construir um estado no qual o instante de emissão possui duas amplitudes, separadas entre si por um intervalo $\Delta t = (L-C)/c$:

$$|\psi(t)\rangle = |\omega, t - t'\rangle + |\omega, t - (t' + \Delta t)\rangle, \quad (9)$$

onde t' representa o instante de emissão do primeiro componente, e ω representa o valor médio da frequência do fóton (omitimos a integral que varre a largura de linha $\Delta\omega$ do pulso). Essas amplitudes não corresponderiam a auto-estados do operador de tempo; mas representariam um pulso curto emitido com uma incerteza $\delta t'$ em torno de t' , incerteza essa bem maior do que a expressa pela eq.(6).

A primeira amplitude seria emitida num instante t' , e se dividiria em dois componentes em S_2 ; a segunda potencialidade de pulso seria emitida em $t' + \Delta t$, e também se dividiria em dois em S_2 . O componente L da primeira amplitude superporia construtivamente com o componente C da segunda amplitude, rumando para D_1 . Os outros dois componentes teriam 50% de chance cada um de cair em D_1 . Assim, com esta preparação do estado do fóton, a probabilidade de detecção em D_1 sobe para 75%. Chegar-se-ia aos 100% se o estado inicial formasse uma seqüência de amplitudes emitidas com a mesma separação Δt .

Este experimento bastaria para verificar que um átomo, antes de uma medição, não tem um instante de emissão bem definido. O problema com tal arranjo está na preparação de uma superposição do tipo desejado, que tem sido chamado de "dupla fenda temporal". Como preparar tal dupla fenda temporal? A maneira que

tem sido usada para gerar tal estado é justamente a partir da interferometria de duas partículas, proposta por Franson. Suponha que dois fótons são gerados simultaneamente, só que em uma superposição quase contínua de estados temporais de emissão, indexados por t' :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{t'} c_{t'} |\omega_1, t - t'\rangle \otimes |\omega_2, t - t'\rangle. \quad (10)$$

As frequências ω_1 e ω_2 correspondem às partículas 1 e 2. Quando uma delas é detectada, digamos a partícula 2 em D_3 (ver Fig. 2), sabemos que a emissão ocorreu numa *superposição* de estados originados em um certo t' , e em $t' + \Delta t$, já que o fóton só pode ter rumado pelo caminho curto C ou pelo longo L, mas é impossível saber qual.⁹ Com isso, ocorre um colapso do estado emaranhado da eq.(10) para o estado da eq.(9) para a partícula 1. Consegue-se assim realizar a dupla fenda temporal, só que não é possível controlar qual será t' . Por causa disso, a interferometria de duas partículas não se baseia na taxa de contagem em D_1 , mas na taxa de coincidência entre D_1 e D_3 .

⁹Utiliza-se aqui o seguinte princípio de indistinguibilidade, atribuível a Feynman: "se duas ou mais histórias possíveis para um sistema forem indistinguíveis em princípio (e não apenas na prática), então estas histórias interferirão, ou seja, as amplitudes de probabilidade de cada história se somarão".

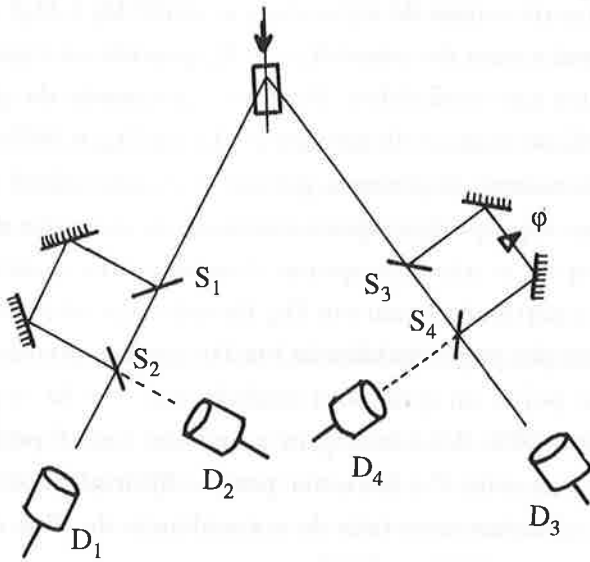


Figura 2: Arranjo do experimento de Franson para duas partículas. Um par de fótons é gerado em um cristal não-linear, mas o instante de emissão não é bem definido. Isso acarreta interferência em cada interferômetro de Mach-Zehnder, mas como há um contínuo de instantes de emissão, todos os tipos de interferência ocorrerão em S_2 e S_4 (construtiva, destrutiva, etc.), e o número de fótons contados em cada detector será aproximadamente igual. O que se observa, porém, é que há uma taxa de coincidência nas contagens em D_1 e D_3 , por exemplo, conforme o ajuste da defasagem φ . Isto envolve um efeito "não-local".

A proposta original de Franson concebia que o estado da eq.(10) fosse gerado de um decaimento de um estado atômico excitado, semelhante ao discutido na seção anterior, só que em um processo de "cascata" que geraria um par de fótons emitidos. As realizações experimentais de interferometria de duas partículas, no entanto, em geral fazem uso de uma outra técnica para gerar pares de fótons: um cristal não-linear bombeado por um laser, gerando pares por "conversão paramétrica" (ver as realizações experimentais da proposta de Franson em: OU *et al.*, 1990; KWIAT *et al.*, 1990).

Qual seria a taxa de coincidência entre D_1 e D_3 ? Comparemos isso com a taxa de coincidência R_0 quando os espelhos semi-transparentes são removidos. Pois bem, partamos da partícula 2: ela tem 50% de chance de ser detectada em D_3 , e 50% de chance em D_4 (isso ocorre, repetimos, porque o estado inicial dos fótons envolve uma superposição quase contínua de instantes de emissão, como na eq.10, e não por apenas dois instantes, como na eq.9). Dado que a partícula 2 caiu em D_3 , fixando um valor para t' , ocorre uma detecção em coincidência em D_1 apenas quando a emissão em t' segue por L ou quando a emissão em $t' + \Delta t$ segue por C. Isso constitui 50% dos casos, pois a emissão em t' pode também rumar por C, e a de $t' + \Delta t$ rumar por L. Multiplicando essas porcentagens, obtemos uma taxa de coincidência de 25% do valor de R_0 (ver FRANSON, 1989, p. 2207).

O fóton interfere assim consigo mesmo, envolvendo duas amplitudes emitidas com uma diferença de tempo Δt . Ao se variar o comprimento L para a partícula 2, e conseqüentemente a defasagem ϕ , observa-se um típico padrão de interferência senoidal (ver OU *et al.*, 1990; KWIAT *et al.*, 1990). Tal fenômeno envolve um efeito de "não-localidade", pois antes da detecção da partícula 2, a partícula 1 tinha iguais chances de cair em cada um dos detectores, mas *imediatamente após* a detecção da partícula 2 em D_3 , as probabilidades da partícula 1 se alteram.

Nossa exposição foi um pouco diferente da abordagem dada na literatura ao experimento de Franson, e procuramos explicar os fenômenos de interferência intuitivamente, fazendo uso do conceito de superposição de estados temporais (que poderia ser traduzido para uma superposição de estados de posição, em um certo instante). Convidamos o leitor que quiser testar sua intuição a tentar entender conceitualmente a montagem experimental pro-

posta por RYFF (1993), que introduz polarizadores no experimento de Franson (lembre-se que componentes polarizados ortogonalmente não interferem!).

Concluimos assim que o experimento de Franson, verificado experimentalmente, confirma a interpretação usual dada aos estados de superposição temporal, ao contrário do que queriam Einstein e Sudberry.

APÊNDICE: INTRODUÇÃO AO FORMALISMO QUÂNTICO

Apresentamos aqui um resumo simplificado do formalismo básico da Mecânica Quântica, relevante para este artigo, e deixamos para outra ocasião uma introdução conceitual e intuitiva à teoria.

A1. Estados

Consideremos um *sistema* quântico individual, como por exemplo um átomo isolado. A mecânica quântica representa este sistema através de um "espaço de Hilbert", que nada mais é do que um espaço vetorial linear complexo, ou seja, um espaço vetorial no qual os vetores são expressos por números complexos (com um módulo e uma fase). Uma maneira de intuir um espaço vetorial complexo de N dimensões é imaginar um espaço euclidiano de dimensão N no qual cada vetor tem $N-1$ fases associadas, onde cada fase pode variar entre 0 e 2π . (Fig. A1).

A cada instante, o *estado* de um sistema quântico "fechado" pode ser representado por um único vetor no estado de Hilbert correspondente. O *princípio de superposição* afirma que dados dois estados permissíveis para um sistema quântico, então qualquer

combinação linear deles também é um estado permissível.

Por exemplo, imaginemos que um átomo pode se encontrar em um dentre 3 níveis discretos de energia (sendo portanto representado em um espaço de Hilbert de 3 dimensões, como o da Fig. A1). Cada um desses valores de energia está associado a um estado, chamado de *autoestado* de energia. Cada um destes autoestados é representado por vetores ortogonais $|\phi_i\rangle$ no espaço de Hilbert, com $i=1,2,3$. Pois bem, pelo princípio de superposição, qualquer combinação linear $|\phi\rangle$ destes vetores representa um estado permissível:

$$|\phi\rangle = a_1 \cdot |\phi_1\rangle + a_2 \cdot |\phi_2\rangle + a_3 \cdot |\phi_3\rangle, \quad (\text{A1})$$

onde os coeficientes a_i são números complexos que satisfazem uma condição de normalização:

$$\sum_i |a_i|^2 = 1. \quad (\text{A2})$$

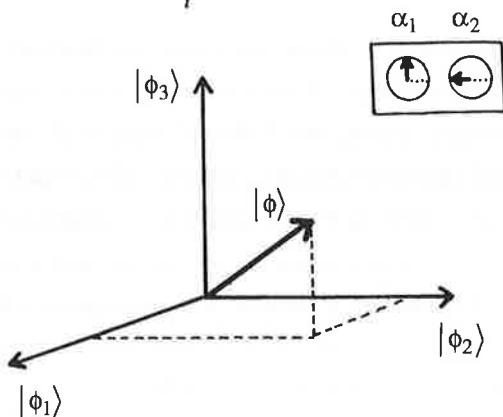


Figura A1: Vetor de estado em um espaço de Hilbert de 3 dimensões. Dada uma base $|\phi_i\rangle$, qualquer vetor $|\phi\rangle$ pode ser caracterizado por suas componentes complexas em relação a esta base. Se o desenho for visto como um espaço euclidiano real, então associam-se 2 fases α_1, α_2 ao vetor de estado. No desenho, o vetor é: $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |\phi_1\rangle + i \frac{3}{4} \cdot |\phi_2\rangle - \frac{1}{2} \cdot |\phi_3\rangle$.

A2. Observáveis

De acordo com o formalismo quântico, toda grandeza física mensurável Q , chamada de *observável*, é descrita no espaço de Hilbert por um operador "auto-adjunto" \hat{Q} .

Um "operador" age em qualquer vetor do espaço de Hilbert e o transforma em outro vetor do mesmo espaço. Se representarmos um vetor por uma matriz coluna com N elementos, então qualquer operador pode ser expresso por uma matriz $N \times N$, que representamos por $[Q_{ij}]$, com coeficientes Q_{ij} complexos. Um operador *auto-adjunto* é igual ao seu "adjunto" \hat{Q}^\dagger , que é representado pela matriz $[Q_{ji}^*]$ (complexo conjugado da matriz transposta).

Dado um observável Q , os resultados possíveis da medição são os *autovalores* γ_i do operador \hat{Q} , que podem ser encontrados resolvendo-se a equação de autovalores:

$$\hat{Q}|\phi_i\rangle = \gamma_i \cdot |\phi_i\rangle. \quad (\text{A3})$$

Os estados $|\phi_i\rangle$ são os *autoestados* de \hat{Q} referidos anteriormente.

Pelo teorema espectral, qualquer operador pode ser escrito da seguinte forma:

$$\hat{Q} = \sum_i \gamma_i \cdot \hat{P}[\phi_i], \quad (\text{A4})$$

onde $\hat{P}[\phi_i] \equiv |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ é o "operador de projeção", que age sobre qualquer vetor $|\psi\rangle$ da seguinte maneira: $\hat{P}[\phi_i]|\psi\rangle = c_i \cdot |\phi_i\rangle$, onde o coeficiente c_i é o produto escalar $\langle\phi_i|\psi\rangle$.

A3. Evolução temporal

Um sistema quântico não é caracterizado apenas por seus estados possíveis, mas também por uma lei de evolução temporal que descreve como cada um destes estados possíveis se transforma. Um exemplo de tal lei é a equação de Schrödinger, que envolve um operador auto-adjunto $\hat{H}(t)$, chamado *hamiltoniano*, que corresponde ao observável energia:

$$\hat{H}(t)|\phi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle \quad (\text{A5})$$

A evolução temporal pode também ser expressa por meio de um *operador de evolução* $\hat{U}(t)$ que tem a propriedade de ser "unitário" ($\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1$). Por exemplo, se o estado inicial no instante t_0 for $|\phi(t_0)\rangle$, o estado em qualquer instante de tempo t será dado por:

$$|\phi(t)\rangle = \hat{U}(t-t_0)|\phi(t_0)\rangle. \quad (\text{A6})$$

A partir do hamiltoniano pode-se calcular o operador de evolução; por exemplo, no caso simples em que \hat{H} não depende do tempo, $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$.

Para um sistema isolado de campos externos, \hat{H} independe do tempo. O hamiltoniano dependerá do tempo, $\hat{H}(t)$, quando o sistema é aberto a campos externos, mas tais campos não são afetados pelo estado do sistema. Estes dois casos constituem evoluções *unitárias*, que são contínuas, deterministas e reversíveis. Se o sistema é aberto e interage com outros sistemas, não se pode definir um operador hamiltoniano auto-adjunto para o sistema. Assim, a equação de Schrödinger não irá reger tal sistema aberto, e a evolução será não-unitária.

A4. Probabilidades de resultados

O estado quântico $|\phi\rangle$ em um dado instante permite calcular as *probabilidades* de se obterem os diferentes autovalores para a medição de qualquer observável. Suponhamos que queiramos saber a probabilidade \wp de medir a energia do sistema e obter o autovalor E_i , associado ao autoestado $|\phi_i\rangle$ de energia. Basta computar a seguinte expressão (quadrado do produto escalar):

$$\wp(E_i) = |\langle \phi_i | \phi \rangle|^2. \quad (A7)$$

Para um outro observável qualquer, as probabilidades podem ser calculadas da mesma maneira a partir dos autoestados correspondentes.

Após uma medição de energia, cujo valor obtido foi E_k , qual é o estado do átomo após a medição? Para uma classe mais simples de medições, chamadas de "medições de 1º tipo", o estado final se reduz ao autoestado $|\phi_k\rangle$ correspondente ao valor E_k . Este é um caso particular do *postulado da projeção*, descrevendo o processo de "redução de estado", que não pode ser descrito por uma equação de evolução unitária (teoremas de "insolubilidade" garantem este resultado para aparelhos de medição finitos).

A5. Relação de indeterminação

Consideremos agora outros graus de liberdade do átomo. Por exemplo, podemos descrever sua posição espacial, que pode assumir valores \vec{r}' , correspondentes a autoestados $|\vec{r}'\rangle$. Em geral, o átomo pode se encontrar em um estado sem posição bem definida, descrito por uma superposição contínua:

$$|\Psi(\vec{r})\rangle = \int d\vec{r}' \psi(\vec{r}') |\vec{r}'\rangle. \quad (\text{A8})$$

Os coeficientes $\psi(\vec{r}')$ desta superposição formam a "função de onda". O operador de posição \hat{R} satisfaz uma equação de autovalores análoga à eq.(A3). O átomo pode agora ser descrito pelo produto tensorial $|\phi\rangle \otimes |\psi(\vec{r}')\rangle$. Isso implica em que os operadores de energia e de posição comutam: $\hat{E}\hat{R} - \hat{R}\hat{E} = 0$.

Consideremos o espaço de Hilbert de infinitas dimensões no qual se define a posição do átomo. Se definirmos uma outra base para este espaço, caracterizaremos os autoestados de um outro operador, como por exemplo o operador de momento \hat{P} . Mostra-se que tais operadores não comutam. Nos restringindo ao eixo x, temos:

$$\hat{P}_x \hat{X} - \hat{X} \hat{P}_x = -i\hbar \hat{I}. \quad (\text{A9})$$

Definindo $\Delta\hat{X}$ e $\Delta\hat{P}_x$ como os desvios padrão de um coletivo de medições simultâneas de posição e momento, obtém-se da eq.(A9) a relação de indeterminação:

$$\Delta\hat{X} \cdot \Delta\hat{P}_x \geq \hbar/2. \quad (\text{A10})$$

A6. Estados puros e mistos

Consideramos até aqui um único átomo isolado, que foi representado como um *estado puro*, isto é, como um vetor de estado $|\phi\rangle$. Se um coletivo de átomos não-interagentes for preparado de maneira "maximal", cada qual no mesmo estado $|\phi\rangle$, então tal coletivo estará em um estado puro. Porém, se a medição de um mesmo observável for efetuada para cada átomo, ao final (usando

o postulado da projeção) não poderemos descrever o coletivo por meio de apenas um vetor de estado. Este *estado misto* ou *mistura* é adequadamente descrito por um "operador de densidade" \hat{W} definido no espaço de Hilbert. Ao final de uma medição de energia no exemplo considerado acima, teríamos:

$$\hat{W} = \sum_i w_i \cdot \hat{P}[\phi_i], \quad (\text{A11})$$

onde os coeficientes w_i são as probabilidades $\wp(E_i)$ de se encontrar um átomo no estado final $|\phi_i\rangle$. Equações análogas às eqs.(A6) e (A7) podem ser obtidas para operadores de densidade.

Referências Bibliográficas

- AHARONOV, Y. & BOHM, D. Time in the quantum theory and the uncertainty relation for time and energy. *Physical Review*, v. 122, p. 1649-1658, 1961. (Reimpresso In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (orgs.). *Quantum theory and measurement*. Princeton : Princeton University Press, 1983. p. 715-724.)
- ALLCOCK, G.R. The time of arrival in quantum mechanics. *Annals of Physics*, v. 53, p. 253-348, 1969.
- BOHM, D. *Quantum theory*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1951.
- BOHR, N. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. *Nature*, v. 121, p. 580-590, 1928. (Reimpresso In: BOHR, N. *Atomic theory and the description of nature*. Cambridge : Cambridge University Press, 1934. p. 52-91; e, In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (orgs.). *Quantum theory and*

measurement. Princeton : Princeton University Press, 1983. p. 87-126.)

———. Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics. In: SCHILPP, P.A. (org.). *Albert Einstein, philosopher-scientist*. Urbana : Open Court, 1949, p. 200-241. (Reimpresso In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (orgs.). *Quantum theory and measurement*. Princeton : Princeton University Press, 1983. p. 9-49.)

BUNGE, M. The so-called fourth indeterminacy relation. *Canadian Journal of Physics*, v. 48, p. 1410-11, 1970.

BROYLES, A.A. Coordinate measurements and operators. *International Journal of Quantum Chemistry*, v. 17, p. 47-74, 1980.

CHIAO, R.Y.; KWIAT, P.G. & STEINBERG, A.M. Faster than light? *Scientific American*, v. 270, p. 38-46, agosto de 1993.

DE MUYNCK, W.M.; DE BAERE, W. & MARTENS, H. Interpretations of quantum mechanics, joint measurement of incompatible observables, and counterfactual definiteness. *Foundations of Physics*, v. 24, p. 1589-1664, 1994.

EINSTEIN, A. Remarks concerning the essays brought together in this co-operative volume. In: SCHILPP, P.A. (org.). *Albert Einstein, philosopher-scientist*. Urbana : Open Court, 1949, p. 665-688.

ENGELMANN, F. & FICK, E. Die Zeit in der Quantenmechanik. *Su-*

plemento del Nuovo Cimento, ser. 10, v. 12, p. 63-72, 1959.

———. Quantentheorie der Zeitmessung. II. *Zeitschrift für Physik*, v. 178, p. 551-562, 1964.

ERBER, T.; HAMMERLING, P.; HOCKNEY, G.; PORRATI, M. & PUTTERMAN, S. Resonance fluorescence and quantum jumps in single atoms: testing the randomness of quantum mechanics. *Annals of Physics*, v. 190, p. 254-309, 1989.

FOCK, V.A. & KRYLOV, N.S. On the uncertainty relation between time and energy. *Journal of Physics USSR*, v. 11, p. 112-120, 1947.

FRANSON, J.D. Bell inequality for position and time. *Physical Review Letters*, v. 62, p. 2205-8, 1989.

GLAUBER, R.J. Optical coherence and photon statistics. In: DEWITT, C.; BLANDIN, A. & COHEN-TANNOUDJI, C. (orgs.). *Quantum Optics and Electronics*. Nova Iorque : Gordon & Breach, 1964. p. 63-185.

GREENBERGER, D.M.; HORNE, M.A. & ZEILINGER, A. Multiparticle interferometry and the superposition principle. *Physics Today*, v. 46, p. 22-29, agosto de 1993.

HEISENBERG, W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, v. 43, p. 172-198, 1927. (Traduzido para o inglês In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (orgs.). *Quantum theory and measurement*.

Princeton : Princeton University Press, 1983. p. 62-84.)

HOLEVO, A.S. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*. Amsterdam : North-Holland, 1982.

HORNE, M.; SHIMONY, A. & ZEILINGER, A. Two-particle interferometry. *Nature*, v. 347, p. 429-430, 1990.

JAMMER, M. *The philosophy of quantum mechanics*. Nova Iorque : Wiley, 1974.

KRAUS, K. Position observables of the photon. In: PRICE, W.C. & CHISSICK, S.S. *The uncertainty principle and foundations of quantum mechanics*. Londres : Wiley, 1977. p. 293-320.

———. Measuring process in quantum mechanics I: continuous observation and the watchdog effect. *Foundations of Physics*, v. 11, p. 547-576, 1981.

KWIAT, P.G.; VAREKA, W.A.; HONG, C.K.; NATHEL, H.; CHIAO, R.Y. Correlated two-photon interference in a dual beam Michelson interferometer. *Physical Review A*, v. 41, p. 2910-3, 1990.

LANDAU, L. & PEIERLS, R. Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie. *Zeitschrift für Physik*, v. 69, p. 56-69, 1931. (Traduzido para o inglês In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (orgs.). *Quantum theory and measurement*. Princeton : Princeton University Press, 1983. p. 465-476.)

MANDELSTAM, L. & TAMM, I. The uncertainty relation between

energy and time in non-relativistic quantum mechanics. *Journal of Physics USSR*, v. 9, p. 249-254, 1945.

MEHLBERG, H. *Time, causality, and the quantum theory*. (Boston Studies in the Philosophy of Science, v. 19.) Vol. II: *Time in a quantized world*. Dordrecht : Reidel, 1980.

MISRA, B. & SUDARSHAN, E.C.G. The Zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, v. 18, p. 756-63, 1976.

OLKHOVSKY, V.S.; RECAMI, E. & GERASIMCHUK, A.J. Time operator in quantum mechanics. I: Nonrelativistic case. *Il Nuovo Cimento*, v. 22 A, p. 263-278, 1974.

OU, Z.Y.; ZOU, X.Y.; WANG, L.J. & MANDEL, L. Observation of non-local interference in separated photon channels. *Physical Review Letters*, v. 65, p. 321-324, 1990.

PAPP, E.W.R. Quantum theory of the natural space-time units. In: PRICE, W.C. & CHISSICK, S.S. *The uncertainty principle and foundations of quantum mechanics*. Londres : Wiley, 1977. p. 29-50.

PARK, D. Time in quantum mechanics. In: ROTH, L.M. & INOMATA, A. (orgs.). *Fundamental questions in quantum mechanics*. Nova Iorque : Gordon & Breach, 1986. p. 263-278.

PAUL, H. Über quantenmechanische Zeitoperatoren. *Annalen der Physik*, série 7, v. 9, p. 252-261, 1962.

- PAULI, W. Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik. In: GEIGER, H. & SCHEEL, K. (orgs.). *Handbuch der Physik*, 2ª ed., v. 24. Berlim : Springer, 1933. (Tradução para o inglês da edição alemã de 1959: *General principles of quantum mechanics*. Berlim : Springer, 1980.)
- PESSOA JR., O. Simple realizations of generalized measurements in quantum mechanics. *Foundations of Physics Letters*, v. 7, p. 447-457, 1994.
- REICHENBACH, H. *The direction of time*. Berkeley : University of California Press, 1956.
- RESCHER, J. & URQUHART, A. *Temporal logic*. (Library of Exact Philosophy, v. 3.) Viena : Springer, 1971.
- RYFF, L.C.B. Franson's experiment using polarized photons. *Physical Review A*, v. 48, p. 1020-22, 1993.
- SALECKER, H. & WIGNER, E. (1958). Quantum limitations of the measurement of space-time distances. *Physical Review*, vol. 109, p. 571-577, 1958.
- SCHRÖDINGER, E. Spezielle Relativitätstheorie und Quantenmechanik. *Berliner Berichte*, v. de 1931, p. 238-248.
- . Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, v. 23, p. 807-812, 823-828, 844-849, 1935. (Traduzido para o inglês In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (orgs.). *Quantum theory and measurement*. Princeton : Princeton University Press, 1983. p. 152-167.)

- STAPP, H. Einstein time and process time. In: GRIFFIN, D.R. (org.). *Physics and the ultimate significance of time*. Albany : State University of New York Press, 1986. p. 264-270.
- SUDBERRY, T. Continuous state reduction. In: PENROSE, R. & ISHAM, C.J. (orgs.). *Quantum concepts in space and time*. Oxford : Clarendon, 1986. p. 65-83.
- TER HAAR, D. Foundations of statistical mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 27, p. 289-338, 1955.
- VON NEUMANN, J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin : Springer, 1932. (Tradução em inglês: *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton : Princeton University Press, 1955.).
- WEISSKOPF, V. & WIGNER, E. Berechnung der natürlichen Lini-enbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie. *Zeitschrift für Physik*, v. 63, p. 54-73, 1930.
- WHEELER, J.A. Law without law. In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (orgs.). *Quantum theory and measurement*. Princeton : Princeton University Press, 1983. p. 182-213.
- WIGNER, E.P. On the time-energy uncertainty relation. In: SALAM, A. & WIGNER, E.P. (orgs.). *Aspects of Quantum Theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 1972. p. 237-247.
- . Interpretation of quantum mechanics. In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (orgs.). *Quantum theory and measurement*.

Princeton : Princeton University Press, 1983. p. 260-314.

ZEH, H.-D. *The physical basis of the direction of time*. Berlim : Springer, 1989.

ZIMMERMAN, E.J. Time and quantum theory. In: FRASER, J.T. (org.). *The voices of time*. Nova Iorque : Braziller, 1966. p. 479-99, 676-7.